

Энергетический метод в расчетах балок прямоугольного поперечного сечения при боковом выпучивании

А.В. Ищенко¹, И.М. Зотов²

¹Московский государственный строительный университет, Москва
²Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: Рассматривается задача бокового выпучивания свободно опертой деревянной полосы с постоянным узким поперечным сечением, нагруженной сосредоточенной силой в середине пролета. При исследовании бокового выпучивания балки был использован энергетический метод. Для случая приложения нагрузки в центре тяжести задача сводится к обобщенному вековому уравнению. Получена зависимость между величиной критической силы и положением точки приложения нагрузки. Для указанной зависимости подобрана линейная аппроксимирующая функция. Выполнено сравнение результатов, полученных авторами, с аналитическим решением при помощи функций Бесселя и численным итерационным методом.

Ключевые слова: Вековое уравнение, устойчивость плоской формы изгиба, энергетический метод, критическая нагрузка, выпучивание, относительный угол закручивания.

Оформление текста статьи

Известно, что если балка с узким прямоугольным сечением изгибается в своей плоскости от действия сосредоточенной силой F , приложенной в центре тяжести среднего поперечного сечения, то при известном значении нагрузки может произойти боковое выпучивание рис. 1.

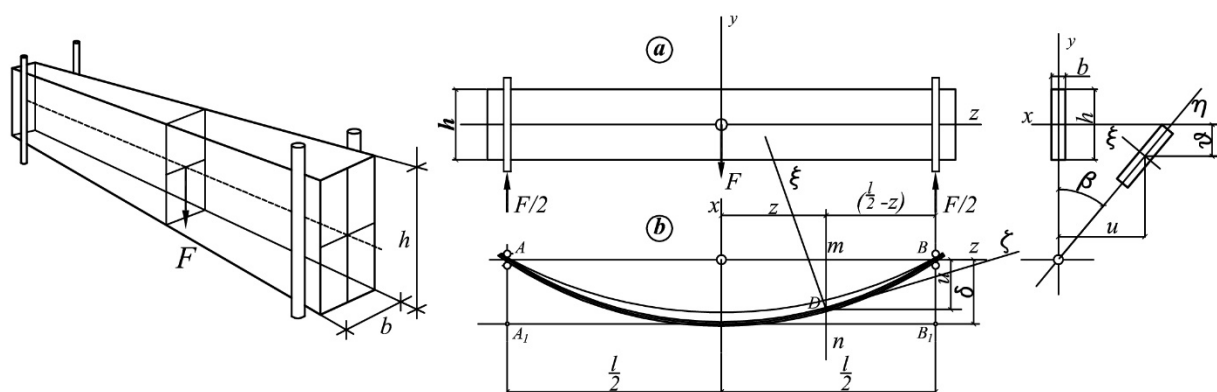


Рис. 1. – Расчетная схема плоской формы изгиба.

При деформации относительно главных осей инерции, параллельных осям X и Y , допускается свободное вращение концов. Вращению же их

относительно оси Z препятствует специальное устройство. Таким образом, боковое выпучивание сопровождается кручением балки [1-4].

Рассмотрим систему неподвижных координатных осей X, Y, Z , имеющих направление как показано на рис. 1. Это необходимо для составления дифференциальных уравнений равновесия выпученной полосы.

Рассмотрим произвольное сечение $n-m$ с координатами ξ, η, ζ . Деформация полосы определяется двумя составляющими перемещения – u и v , а так же углом β , на который оно поворачивается. Значения кривизн центральной оси полосы, показанной на рис. 1 в плоскостях XZ и YZ , будут соответственно $\frac{\partial^2 u}{dz^2}$ и $\frac{\partial^2 v}{dz^2}$. Можно ввести предположение, что для малого угла β можно допустить, что кривизна в плоскостях ξ, η, ζ имеет эти же значения. Угол закручивания на единицу длины центральной оси будет $\frac{\partial \beta}{dz}$.

Тогда уравнение равновесия имеет вид [4,6,7]:

$$\begin{cases} B_1 \frac{\partial^2 u}{dz^2} = M_\eta; \\ B_2 \frac{\partial^2 v}{dz^2} = -M_\xi; \\ C \frac{\partial \beta}{dz} = M_\zeta; \end{cases} \quad (1)$$

Здесь: $C = G \frac{b^3 h}{3} \left(1 - 0,630 \frac{h}{b} \right)$, $B_1 = E \frac{b^3 h}{12}$, $B_2 = E \frac{h^3 b}{12}$, – жесткость при кручении и изгибные жесткости соответственно. M_η, M_ξ, M_ζ – моменты относительно соответствующих осей сил, действующих на часть полосы, лежащую справа от поперечного сечения $m-n$.

Отметим, что моменты считаются положительными, когда они действуют в тех же направлениях, в которых были указаны для положительных вращений относительно осей ξ, η и ζ .

В дальнейшем при выводе разрешающих уравнений необходимы выражения для косинусов углов между осями координат ξ, η, ζ и X, Y, Z .

Предполагая величины перемещения u, v и β очень малыми, требующиеся в расчетах косинусы будут иметь значения, данные ниже рис 2:

Рассматривая равновесие правой части полосы сечения $m-n$, видим, что внешние силы, действующие на эту часть, сводятся к вертикальной силе $\frac{F}{2}$ и реактивному крутящему моменту $\frac{F}{2}\delta$ действующим в точке B .

Оси координат	X	Y	Z
ξ	1	β	$-\frac{\partial u}{\partial z}$
η	$-\beta$	1	$-\frac{\partial v}{\partial z}$
ζ	$\frac{\partial u}{\partial z}$	$\frac{\partial v}{\partial z}$	1

Рис.2 Значения косинусов между осями координат ξ, η, ζ и X, Y, Z

Моменты относительно осей, имеющих начало в центре точки D поперечного сечения и параллельных осям X, Y, Z будут:

$$M_x = -\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2} - z\right); \quad M_y = 0; \quad M_z = \frac{F}{2}(\delta - u)$$

где: δ – боковой прогиб в середине балки, а u – прогиб в поперечном сечении $m-n$.

При помощи таблицы косинусов рис.2 получаем:

$$\begin{cases} M_\xi = -\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2} - z\right) - \frac{F}{2}(\delta - u)\frac{\partial u}{\partial z}; \\ M_\eta = \frac{F}{2}\left(\frac{l}{2} - z\right)\beta - \frac{F}{2}(\delta - u)\frac{\partial v}{\partial z}; \\ M_\zeta = -\frac{F}{2}\left(\frac{l}{2} - z\right)\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{F}{2}(\delta - u); \end{cases} \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в (1) получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} B_1 \frac{\partial^2 u}{dz^2} = \frac{F}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \beta - \frac{F}{2} (\delta - u) \frac{\partial v}{\partial z}; \\ B_2 \frac{\partial^2 v}{dz^2} = \frac{F}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) + \frac{F}{2} (\delta - u) \frac{\partial u}{\partial z}; \\ C \frac{\partial \beta}{dz} = -\frac{F}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right) \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{F}{2} (\delta - u); \end{cases} \quad (3)$$

Исключив перемещение u из первого и третьего уравнений, и приняв $v = 0$, ввиду ее малости, получаем:

$$\frac{\partial^2 \beta}{dz^2} + \frac{F^2}{4B_1 C} \left(\frac{l}{2} - z \right)^2 \beta = 0. \quad (4)$$

Численное решение в конечно-разностной схеме и решение в бесконечных рядах дает результат критической силы [5,6]:

$$F_{кр} = \frac{16,93 \sqrt{B_1 C}}{l^2}; \quad (5)$$

При $\alpha = 0$, т.е. когда сила приложена в центре тяжести сечения коэффициент K равен 16.93, и ему соответствует собственное значение $\lambda = 286,42$.

При исследовании бокового выпучивания балки во многих случаях можно с большой выгодой применить энергетический метод. Для иллюстрации применения этого метода рассмотрим опять случай, представленный на рис.1.

Когда балка выпучивается в сторону, энергия деформации балки увеличивается, так как изгибу балки в плоскости действия нагрузки сопутствует изгиб в поперечном направлении и кручение вокруг продольной оси. В то же время точка приложения нагрузки понижается, и нагрузка производит некоторую работу. Критическое значение нагрузки теперь определится из условия, что эта работа равна энергии деформации бокового

изгиба, сложенной с энергией деформации кручения. При этом можно пренебречь небольшим изменением энергии" изгиба балки в её плоскости, которое происходит при выпучивании. Это равносильно сделанному прежде допущению при составлении дифференциальных уравнений равновесия, что кривизна в плоскости стенки бесконечно мала и ею можно пренебречь. Результат, полученный этим путём, вполне точен, когда жёсткость балки в плоскости стенки бесконечно велика, и он достаточно правилен, если эта жёсткость очень велика по сравнению с жёсткостью в поперечном направлении, что как раз в практике имеет место.

Для определения энергии деформации изгиба и кручения можно применить обычные формулы. В таком случае, принимая во внимание симметричность выпученной формы балки (Рис. 1), получаем увеличение энергии деформации вследствие выпучивания в следующем виде:

$$\mathcal{E} = B_1 \int_0^{0,5l} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 dz + C \int_0^{0,5l} \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)^2 dz \quad (6)$$

Для определения понижения нагрузки F при боковом выпучивании рассмотрим элемент продольной оси балки в точке D (Рис. 1). Если считать поперечное сечение $m-n$ как бы закреплённым, то вследствие изгиба этого элемента в плоскости конец B балки будет описывать в плоскости бесконечно малую дугу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left(\frac{l}{2} - z \right) dz, \quad (7)$$

вертикальная компонента, которой равна

$$\beta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left(\frac{l}{2} - z \right) dz, \quad (8)$$

Теперь, изменяя z от 0 до $l/2$ и суммируя вертикальные компоненты, выраженные (8), получаем понижение точки приложения нагрузки F вследствие бокового выпучивания балки в виде интеграла:

$$\int_0^{0,5l} \beta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left(\frac{l}{2} - z \right) dz \quad (9)$$

Уравнение для определения критической нагрузки становится следующим:

$$F \int_0^{0,5l} \beta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \left(\frac{l}{2} - z \right) dz = B_1 \int_0^{0,5l} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 dz + C \int_0^{0,5l} \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)^2 dz \quad (10)$$

Подставляя вместо $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ значение, вытекающее из первого уравнения (3), получаем:

$$\frac{F^2}{4B_1} \int_0^{0,5l} \beta^2 \left(\frac{l}{2} - z \right)^2 dz = C \int_0^{0,5l} \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)^2 dz \quad (11)$$

Для определения критического значения нагрузки F , необходимо принять для угла кручения β подходящее аналитическое выражение, удовлетворяющее условиям на концах балки, и подставить его в уравнение (11). Общее выражение для β , удовлетворяющее условиям на концах, может быть взято в форме тригонометрического ряда:

$$\beta = a_1 \cos \frac{\pi z}{l} + a_2 \cos \frac{3\pi z}{l} + a_3 \cos \frac{5\pi z}{l} + \dots \quad (12)$$

Используя для β как первое приближение только первый член этого ряда, подставляя его в уравнение (11) и проинтегрировав, получим:

$$F_{кр} = \frac{17,2\sqrt{B_1 C}}{l^2}; \quad (13)$$

Численное решение в конечно-разностной схеме и решение с использованием энергетического метода дает разницу в результатах критической силы 1,5%. Если взять в качестве второго приближения первые два члена ряда (12) и подобрать постоянные a_1 и a_2 так, чтобы сделать $F_{кр}$ минимумом, ошибка будет меньше 0,1%.

Таким образом, из последнего примера видно, что энергетический метод можно успешно применять при изучении бокового выпучивания

балок. Добавим, что при использовании энергетического метода сложное интегрирование дифференциальных уравнений методом бесконечных рядов заменяется вычислением простых интегралов, входящих в уравнение (10), и сравнительно простое выражение для β обычно дает $F_{кр}$ с точностью, достаточной для практических целей. Обычно $F_{кр}$ определяемое энергетическим методом, всегда больше ее истинного значения.

Величина критической нагрузки $F_{кр}$ зависит от положения ее точки приложения [1,8,9]. Очевидно, что приложение нагрузки выше центра поперечного сечения уменьшает ее критическое значение, а приложение ее ниже центра производит обратное действие. Размер этого эффекта легко получить, пользуясь энергетическим методом; необходимо только принять во внимание дополнительное понижение нагрузки F вследствие бокового выпучивания балки, вызванного вращением среднего поперечного сечения. Если принять β_0 – угол вращения и a – вертикальное расстояние точки приложения нагрузки от центра поперечного сечения (положительное, когда она находится на верху), то дополнительное понижение нагрузки будет:

$$a(1 - \cos \beta_0) \approx \frac{a\beta_0^2}{2} \quad (14)$$

Тогда вместе уравнения (10) получаем:

$$F \frac{a\beta_0^2}{2} + \frac{F^2}{4B_1} \int_0^{0,5l} \beta^2 \left(\frac{l}{2} - z \right)^2 dz = C \int_0^{0,5l} \left(\frac{\partial \beta}{\partial z} \right)^2 dz \quad (15)$$

Если $a \rightarrow 0$ то первый член левой части (15) является малой величиной и можно подставить в него значение (5) для F . Таким образом, получается следующая приближенная формула:

$$F_{кр} = \frac{16,93\sqrt{B_1 C}}{l^2} \left(1 - \frac{3,48a}{l} \sqrt{\frac{B_1}{C}} \right); \quad (16)$$

Произведено сравнение результатов, полученных нами при помощи энергетического метода с итерационным алгоритмом [1,8,9] и аналитическим решением А.С. Вольмира [3] на основе функций Бесселя (табл. 1).

Таблица 1.

Коэффициент K в зависимости вертикального расстояния точки приложения нагрузки от центра поперечного сечения

Над центром тяжести							
a	0	0,03	0,143	0,293	0,544		
К (Чепурненко)	16,94	15,9857	12,7765	9,6056	6,3512		
К (Вольмир)	16,94	16,0	12,8	9,6	6,4		
К (авторы)	16,93	15,9677	12,7265	9,5956	6,3498		
Под центром тяжести							
	0	-0,069	-0,166	-0,271	-0,396	-0,562	-0,815
К (Чепурненко)	16,94	19,215	22,357	25,539	28,735	31,945	35,123
К (Вольмир)	16,94	19,2	22,4	25,6	28,8	32,0	35,2
К (авторы)	16,93	19,209	22,378	25,547	28,773	31,983	35,144

Совпадение результатов свидетельствует об их достоверности.

Литература

1. Чепурненко А.С., Ульяновская В.В., Высоковский Д.А., Зотов И.М. Численный расчет балок прямоугольного поперечного сечения на устойчивость плоской формы изгиба. // Инженерный вестник Дона, 2018, №2 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/4854.
2. Timoshenko S.P., Gere J.M. Theory of elastic stability, McGraw-Hill, New York, 1961, second edition, 541 p.
3. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967, 984 с.

4. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. Л., М.: Гостехиздат, 1946, 535 с.
5. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1977, 154 с.
6. Sorin Micu, Ionel Roventă, Laurențiu Emanuel Temereancă. Approximation of the controls for the linear beam equation. Springer-Verlag London, 2016. URL:researchgate.net/publication/294736245_Approximation_of_the_controls_for_the_linear_beam_equation.
7. Карамышева А.А., Языев Б.М., Чепурненко А.С., Языева С.Б. Оптимизация геометрических параметров двухскатной балки прямоугольного сечения // Инженерный вестник Дона, 2015, №3 URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3138.
8. Карамышева А.А., Языев Б.М., Чепурненко А.С., Языева С.Б. Оптимизация формы ступенчато-призматической балки при изгибе // Инженерный вестник Дона, 2015, №3 URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3137.
9. Karamysheva A.A., Yazyev S.B., Avakov A.A. Calculation of plane bending stability of beams with stiffness. ICIE, 2016, pp. 1872-1877.
10. Языев Б.М. Оптимизация формы поперечного сечения сжатых стержней из условия устойчивости / Б. М. Языев, А. С. Чепурненко, // Научное обозрение. - 2012. - № 6. - С. 202-204.

References

1. Chepurnenko A. S., Ulyanskaya V. V., Vysokovskiy D. A., Zotov I. M. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2018, №2 URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/N2y2018/4854.
2. Timoshenko S.P., Gere J.M. Theory of elastic stability, McGraw-Hill, New York, 1961, second edition, 541 p.

3. Vol'mir A. S. Ustoychivost' deformiruemykh system [Stability of deformable systems]. Moskow: Nauka, 1967, 984 p.
4. Timoshenko S.P. Ustoychivost' uprugikh system [Stability of elastic systems]. L., Moskow: Gostekhizdat, 1946, 535 p.
5. Varvak P.M., Varvak L.P. Metod setok v zadachakh rascheta stroitel'nykh konstruktsiy [The method of grids in the problems of calculating building structures]. Moskow: Stroyizdat, 1977, 154 p.
6. Sorin Micu, Ionel Roventă, Laurențiu Emanuel Temereancă. Approximation of the controls for the linear beam equation. Springer-Verlag London, 2016. URL:researchgate.net/publication/294736245_Approximation_of_the_controls_for_the_linear_beam_equation.
7. Karamysheva A.A., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Yazyeva S.B. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №3 URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3138.
8. Karamysheva A.A., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Yazyeva S.B. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015, №3 URL:ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2015/3137.
9. Karamysheva A.A., Yazyev S.B., Avakov A.A. Calculation of plane bending stability of beams with stiffness. ICIE, 2016, pp. 1872-1877.
10. Yazyev B. M. Optimization of the cross-sectional shape of the compressed rods from the stability condition. B. M. Yazyev, A. S., Chepurnenko. Scientific review. 2012. № 6. pp 202-204.