

Задачи и методы тоновой аппроксимации растровых монохромных мультитоновых изображений

А.Г. Агаджанян

Донской государственной технической университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: В статье рассматриваются существующие подходы к решению актуальной задачи тоновой аппроксимации цифровых изображений, которая заключается в сокращении размерности цветовой (яркостной) палитры изображения. В рамках обзора описывается их классификация и анализируются главные недостатки и преимущества конкретных методов. Также в статье обсуждается гибридная модель оптимизации тоновой аппроксимации монохромных цифровых изображений, предложенная и разработанная автором, и приводятся результаты сравнительных исследований с известными методами.

Ключевые слова: тоновая аппроксимация, оптимизация, монохромные изображения, эволюционно-генетический алгоритм, метод к-средних, квантование цвета, квантизация цвета, медианное сечение, сжатие изображений, распознавание образов, аппроксимация изображений, обработка изображений

Введение. Значительную нишу во всем современном информационном потоке данных занимают цифровые изображения (ЦИ), которые активно применяются в различных сферах человеческой деятельности. В связи с этим актуализируются задачи, направленные на упрощение хранения, передачи и управления ЦИ. Одной из таких задач является тоновая аппроксимация ЦИ, заключающаяся в понижении размера исходной палитры, т.е. подразумевается сокращение количества цветов (тонов), используемых для воспроизведения ЦИ [1-3].

Необходимость отображения ЦИ на устройствах, имеющих ограничения в объеме памяти и диапазоне возможного цветовоспроизведения, стало причиной возникновения задачи тоновой аппроксимации [1-3]. Тем не менее данная процедура актуальна и в современное время, поскольку может быть применена в сжатии [1-3], распознавании образов [4,5], художественной обработке [1-3], восстановлении [5] и других технических задачах [4, 5].

Сама процедура достаточно проста и осуществляется заменой тонов исходной палитры, имеющей широкий цветовой (яркостной) диапазон, на

тона из аппроксимирующей палитры (АП), которая включает меньшее количество тонов. Соответственно, отдельный тон АП покрывает в ЦИ некоторый набор тонов исходной палитры.

Следует отметить, что в западной литературе для описания данной процедуры преимущественно используется термин «квантование цвета» (color quantization) [1-5]. Однако, в коллективных работах автора [6-10] используется термин «тоновая аппроксимация». В первую очередь это связано с тем, что характер термина «аппроксимация» подразумевает упрощение, что и является результатом рассматриваемой процедуры, поскольку упрощается передаваемый визуальный образ. Кроме того, термин квантование используется применительно к переводу аналогового сигнала в дискретный, тогда как ЦИ уже является таковым.

Рассмотрим пример тоновой аппроксимации монохромного мультитонового изображения размером 1024 на 1042 пикселей, имеющего стандартную палитру в 256 тонов, до 16 и 8 тонов (см. рис. 1).



Рис. 1. – Пример тоновой аппроксимации ЦИ до различной размерности палитры

На рисунке 1 представлен пример сокращения исходной палитры ЦИ в 16 и 32 раза. Если в первом случае визуальные потери не очень существенны, то при понижении размерности исходной палитры в 32 раза погрешности отчетливо наблюдаются (см. рис. 1).

Однако, размер АП не является единственным фактором, оказывающим влияние на качество тоновой аппроксимации. Весомое значение также имеет структура АП, т.е. цвета (тона) входящие в эту палитру. Рассмотрим тоновую аппроксимацию ЦИ с использованием АП одного размера, но отличного по структуре (см. рис. 2). Для большей наглядности на рисунке также продемонстрирован увеличенный фрагмент оригинального изображения

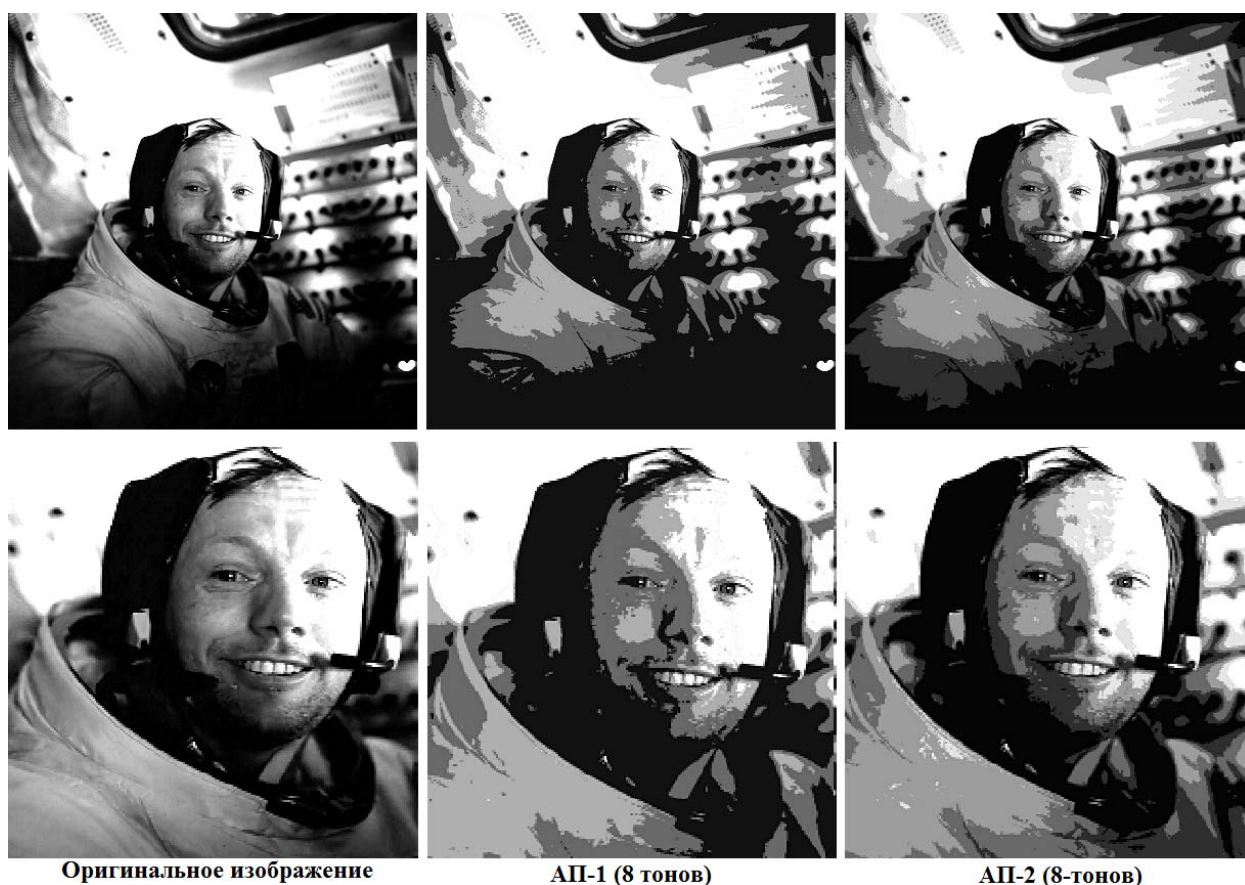


Рис. 2. – Тоновая аппроксимация изображения двумя АП, которые отличаются структурно

На представленном примере наглядно прослеживается меньшая погрешность визуального отображения при аппроксимации изображения с помощью АП-2 (см. рис. 2). Как черты лица, так и скафандр на аппроксимированном с использованием АП-2 изображении имеют меньшие визуальные огрехи, нежели при использовании АП-1. Таким образом,

возникает задача оптимизации тоновой аппроксимации изображений, т.е. подбора адекватной структуры АП с целью снизить отклонения аппроксимированного ЦИ от оригинальной версии.

Оценка качества тоновой аппроксимации. Для подбора корректной структуры АП необходима соответствующая мера оценки этой «корректности». Математическая модель ЦИ представляет собой матрицу, где каждый элемент является пикселем (минимальная единица изображения в растровой графике) ЦИ и содержит информацию о тоне:

$$I(i, j, k) = \begin{bmatrix} \cdot & \vdots & \cdot \\ \cdots & (t_k)_{ij} & \cdots \\ \cdot & \vdots & \cdot \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где I – матрица ЦИ; i – индекс строки; j – индекс столбца; k – индекс тона t в пространстве палитры ЦИ. Подобная модель позволяет вычислить наиболее полную оценку погрешности между аппроксимированным ЦИ и оригинальным за счет поэлементного расчета суммы отклонений между двумя матрицами. Наиболее популярным является использование в качестве критерия качества средний квадрат отклонения [1-3]:

$$\Delta t = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left((t_k^a)_{ij} - (t_k^o)_{ij} \right)^2, \quad (2)$$

здесь $N = n * m$ – общее количество пикселей ЦИ; t^a – тон аппроксимированного ЦИ; t^o – тон оригинального ЦИ. В рамках исследования [7] рассматривался вопрос адекватности использования критерия среднего модуля отклонения (СМО) применительно к оценке качества аппроксимации монохромных мультитоновых изображений. В результате не удалось однозначно выявить преимущество какого-либо критерия в точности оценки качества преобразования ЦИ, но вычисление СМО требует меньшего времени. В связи с этим в исследованиях автора, где

рассматривается тоновая аппроксимация именно монохромных ЦИ, используется критерий СМО:

$$\Delta t = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \left| \left(t_k^a \right)_{ij} - \left(t_k^o \right)_{ij} \right|. \quad (3)$$

Критерий (3) позволяет вычислить объективную числовую оценку качества аппроксимированного ЦИ. Рассмотрим результаты оценки примера, представленного на рисунке 2, руководствуясь объективным критерием. Согласно критерию (3) аппроксимированное ЦИ, полученное при использовании АП-2, имеет оценку 5,33, тогда как результат аппроксимации при АП-1 оценивается в 7,07 единиц. Таким образом, в рассмотренном структуре АП-2 позволила понизить визуальную погрешность в сравнении с АП-1 на ~24,6%.

Алгоритмы тоновой аппроксимации ЦИ. Для решения задачи подбора структуры АП существуют множество алгоритмов, которые так или иначе подразделяются на пред-кластерные и пост-кластерные (см. рис. 3) [2]. Пред-кластерные алгоритмы предполагают однократное вычисление АП, тогда как пост-кластерные определяют некую стартовую структуру АП с целью ее итеративного улучшения согласно какому-либо механизму [2].

Основным преимуществом пред-кластерных методов является их простота и достаточно высокая скорость вычисления, тогда как пост-кластерные методы способны обеспечивать высокое качество тоновой аппроксимации, но, как правило, требуют более существенного временного ресурса.

На представленной схеме с классификацией (рис. 3) видно, что пред-кластерных алгоритмов больше и они в свою очередь подразделяются на группы, которые отличаются по базовому принципу подхода к решению задачи. Рассмотрим суть основных пред-кластерных подходов.

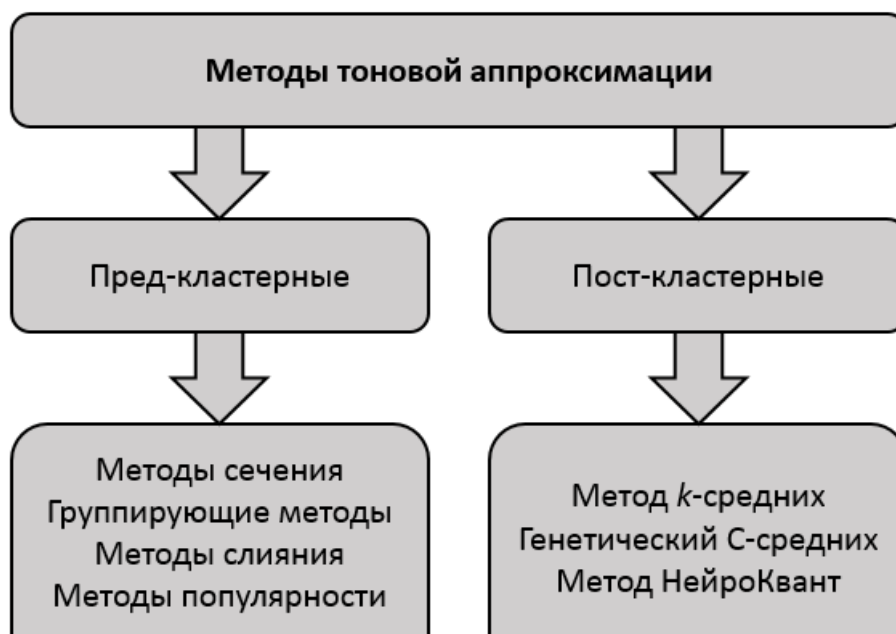


Рис. 3. – Классификация методов тоновой аппроксимации ЦИ

Пред-кластерные методы тоновой аппроксимации ЦИ. Методы сечения. Наибольшее распространение в пред-кластерной группе алгоритмов занимают методы сечения. Фундаментальной базой этой группы методов является рекурсивное деление (сечение) цветового пространства на два подмножества до формирования заданного количества, которое эквивалентно размеру АП [2]. Средние значения сформированных подмножеств и являются конечными тонами, образующими структуру АП.

Методы сечения главным образом отличаются друг от друга по принципу выбора точки сечения, подмножества для сечения и оси, относительно которой выполняется сечение, поскольку цветное пространство является трехмерным [2]. Очевидно, что при тоновой аппроксимации монохромных ЦИ принцип выбора оси опускается в связи с одномерностью монохромной палитры.

Основную нишу как в методах сечения, так и в пред-кластерной группе в целом занимает алгоритм медианного сечения [2, 11]. Этот алгоритм выполняет сечение пространства в медианной точке по доминантной оси, т.е.

согласно оригинальной работе [11] выполняется такое сечение, которое оставляет приблизительно одинаковое количество цветов в каждом из двух подмножеств. Доминирующая ось повторно вычисляется перед каждым новым сечением исходя из длины диапазона (доминантным считается ось с наибольшим диапазоном). Необходимо отметить, что во многих интернет ресурсах алгоритм медианного сечения имеет другое описание и подразумевает осуществление такого сечения, которое оставляет одинаковое количество пикселей в двух подмножествах, но это не подтверждается оригинальной работой [11].

Также к этой группе относятся алгоритм минимизации отклонения [12], алгоритм бинарного сечения [13] и равномерное (линейное) сечение. Алгоритм равномерного сечения является наиболее простым и предполагает просто разделение всего пространства на приблизительно равные участки. Необходимо отметить, что алгоритм медианного сечения в классической реализации [11] применительно к монохромным ЦИ становится эквивалентным равномерному сечению.

Группирующие методы. Данный подход предполагает вычисление АП за один цикл обхода ЦИ, где элементы (цвета/тона) включаются в подмножества базируясь на какое-либо правило их классификации, причем опираясь в том числе и на просканированные ранее элементы. К подобным методам относятся алгоритм слияния и блоков [14], алгоритм на основе октодеревя [15] и алгоритм макс-мин [2].

Методы слияния. Рассматриваемый подход можно назвать гибридизацией методов сечения и группировки. Как правило, методы слияния сперва осуществляют соответствующие сечения с целью формирования подмножеств, но большего количества, нежели заданная размерность АП [2]. После этой процедуры подмножества сливаются (группируются) согласно какому-либо правилу до необходимого для АП

количества. Например, слияние может происходить по принципу наименьшего квадратичного отклонения между подмножествами [2].

Методы популярности. Алгоритмы основанные на подходе популярности предполагают осуществление подбора АП по принципу их наибольшего количества в ЦИ [2, 11]. Подобный подход в условиях малоразмерной АП может породить серьезные визуальные погрешности [2].

Пост-кластерные методы тоновой аппроксимации ЦИ. Эффективность рассмотренных пред-кластерных методы зависит в первую очередь от тонового распределения ЦИ, т.е. от частотной диаграммы яркости. Например, обычное равномерное сечение способно обеспечить оптимальный результат при условии относительно равномерной диаграммы яркости ЦИ. Однако, на практике ЦИ имеют сложную структуру тонового распределения, что не позволяет пред-кластерным алгоритмам всегда обеспечивать эффективный результат согласно критерию (3) и требует реализации поискового механизма по подбору структуры АП.

Метод k -средних. Если в пред-кластерной группе методов наиболее популярным является алгоритм медианного сечения, то в пост-кластерном таковым является метод k -средних [2, 3, 16]. Данный метод считается наиболее популярным методом кластеризации [2, 3] и состоит в итеративном уменьшения квадратичного отклонения центроида подмножества от элементов этого подмножества. В начале алгоритма определяется стартовая структура АП, найденная по какому-либо правилу. После этого образуются соответствующие подмножества по принципу наиболее близких элементов к начальным центроидов (тонов, входящих в стартовую структуру АП). Далее итеративно вычисляются центры-масс для каждого подмножества, согласно чему сдвигаются центроиды, что ведет к уменьшению квадратичного отклонения. Эта процедура повторяется до тех пор, пока центроиды изменяются. Конечные центроиды входят в структуру АП.

Данный метод имеет детерминированную сущность и зависит от эффективного выбора начальных центроидов (стартовой структуры АП) [2, 3]. Этот фактор является основной проблемой метода k -средних.

Генетический C-средних. Этот подход предполагает гибридизацию генетического алгоритма Голдберга с методом k -средних. Данный метод был предложен и изучен сразу двумя научными коллективами, чьи подходы к реализации не имели существенных отличий и предполагали смешенную стратегию взаимодействия [17, 18]. К недостаткам этого подхода можно отнести простую генетическую модель, полностью случайное формирование исходного множества альтернатив и фиксированное число итераций алгоритма. Также необходимо отметить, что в задаче тоновой аппроксимации именно монохромных ЦИ существует потенциальные возможности эффективного использования других детерминированных алгоритмов.

Алгоритм НейроКвант. Оптимизация тоновой аппроксимации ЦИ в рассматриваемом подходе реализована на основе самоорганизующейся нейронной сети Кохонена, которая применяется в задачах кластеризации [2, 19]. Основной проблемой данного подхода является большие вычислительные затраты [2], поскольку нейронная сеть требует соответствующего обучения. Алгоритм НейроКвант способен обеспечивать высокое качество тоновой аппроксимации ЦИ. Однако, в условиях малоразмерной АП этот подход теряет свою эффективность [2].

Гибридная модель оптимизации тоновой аппроксимации ЦИ. Этот метод был предложен, разработан и экспериментально исследован в коллективных работах автора [6-10]. Разработанная гибридная модель оптимизации (ГМО) выполняет последовательную обработку ЦИ и обеспечивает экстремальную АП согласно критерию (3).

Сперва осуществляется обработка модифицированным эволюционно-генетическим алгоритмом [6,7] с целью сокращения области поиска экстремальной АП, после чего полученная структура исследуется детерминированным алгоритмом поиска ближайшего экстремума, которая реализуется как алгоритм частичного перебора [8-10]. Экспериментальные исследования подтвердили высокую эффективность алгоритма ГМО [9, 10], которая также позволяет реализовать дуальную оптимизацию процедуры тоновой аппроксимации за счет обеспечения взаимной оптимальности показателей времени и точности.

Необходимо отметить, что модель ГМО разрабатывался с целью реализации процедуры тоновой аппроксимации применительно к монохромным ЦИ. Такое решение принято в связи с тем, что обработка и использование монохромные ЦИ востребованы во многих научно-технических задачах [20-25], среди которых наибольший интерес представляет возможное применения данной процедуры в системах технического зрения [20, 23].

Сравнение методов тоновой аппроксимации монохромных ЦИ. В разделе введения рассматривался пример тоновой аппроксимации изображения двумя АП, обеспечивающими различное качество тоновой аппроксимации монохромного ЦИ (см. рис. 2). В этом примере палитра АП-1 была получена алгоритмом медианного сечения, а АП-2 алгоритмом ГМО, что обеспечило улучшение качества тоновой аппроксимации обрабатываемого ЦИ практически на 25% по критерию (3). Исследования на большей выборки изображений показали, что алгоритм ГМО в среднем позволяет превзойти результат медианного сечения на ~15%.

В работе [26] было проведено сравнительное исследование различных авторских модификаций метода k -средних по сравнению с ГМО. Наиболее эффективная по качеству тоновой аппроксимации модификация метода k -

средних уступила алгоритму ГМО в среднем на $\sim 2,7\%$, но при этом занимая почти в 2 раза больше вычислительного времени. Модификация метода k -средних, сопоставимая по временному показателю с ГМО, оказалась хуже по качеству тоновой аппроксимации в среднем на $\sim 3,65\%$. Необходимо отметить, что по некоторым изображениям алгоритм ГМО обеспечивал улучшение качества по сравнению с методом k -средних более 15-20% согласно критерию (3).

Заключение. В статье рассмотрены основные фундаментальные аспекты подходов к тоновой аппроксимации ЦИ, их классификация, а также анализ недостатков отдельных методов и подходов в целом. Кроме того, в статье описывается подход к тоновой аппроксимации монохромных ЦИ, предложенный в коллективных исследованиях автора, и краткие результаты проведенных сравнительных исследований с популярными инструментами решения задачи тоновой аппроксимации ЦИ.

Работа публикуется при финансовой поддержке Гранта РФФИ согласно Договору №18-07-20056 Г.

Литература

1. Burger W., Burge M. Color Quantization // Digital Image Processing. Texts in Computer Science. London: Springer. 2016. pp. 329-339.
 2. Brun L., Tremeau A. Digital Color Imaging Handbook. The Electrical Engineering and Applied Signal Processing Series. NYC: CRC Press. 2003. 764 p.
 3. Sangwine S., Horne R. The Colour Image Processing Handbook. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. 1998. 425 p.
 4. Emre C. Improving the Performance of K-Means for Color Quantization. // Image and Vision Computing. vol. 29. 2011. pp. 260-271.
 5. Yue X.D., Miao D.Q., Cao L.B., Wu Q., Y.F. Chen An efficient color quantization based on generic roughness measure // Pattern Recognition: vol. 47. 2014. pp. 1777-1789.
-

6. Neydorf R.A., Aghajanyan A.G., Vucinic D. Monochrome multitone image approximation with low-dimensional palette // IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). 2016. pp. 1-4.

7. Нейдорф Р.А., Агаджанян А.Г. Исследование аспектов возможного применения субоптимальной тоновой аппроксимации изображений в задачах технического зрения средств автономной навигации // Известия ЮФУ, Технические науки. Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ. №1-2 (186-187). 2017. С. 133-145.

8. Нейдорф Р.А., Агаджанян А.Г., Нейдорф А.Р. Оптимизация результатов аппроксимации растровых изображений и оценка их экстремальности // Математические Методы в Технике и Технологиях. Саратов: СГТУ и Ю.А. Гагарина. Том 1. 2017. с. 19-26.

9. Neydorf R.A., Aghajanyan A.G., Vucinic D. A high-speed hybrid algorithm of monochrome multitone images approximation // IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). 2017. pp. 1-4.

10. Neydorf R.A., Aghajanyan A.G., Vucinic D. Improved Bi-optimal Hybrid Approximation Algorithm for Monochrome Multitone Image Processing // ADVCOMP 2017, The Eleventh International Conference on Advanced Engineering Computing and Applications in Sciences. IARIA. 2017. pp. 20-25.

11. Heckbert P. Color image quantization for frame buffer display // SIGGRAPH '82 Proceedings of the 9th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. Boston, Massachusetts, USA: ACM. 1982. pp. 297-307.

12. Wan S., Wong S., Prusinkiewicz P., An algorithm for multidimensional data clustering. ACM Trans. Mathematical Software. Vol. 14(2). 1988. pp. 153–162.

13. Bouman C., Orchard M. Color quantization of images. IEEE Trans. Signal Processing. Vol. 39(12).1991. pp. 2677–2690.

14. Fletcher P. A SIMD parallel colour quantization algorithm, *Comput. Graphics*. Vol. 15(3). 1991. pp. 365–373.

15. Gervautz M. and Purgathofer W., A simple method for color quantization: octree quantization, in N. Magnenat-Thalmann and D. Thalmann, Eds., *New Trends in Computer Graphics*, Springer-Verlag, New York. 1988. pp. 219–231.

16. Llyod S. P. Least squares quantization, *IEEE Trans.*, IT-28. 1982. pp. 129–137.

17. Scheunders P. A Genetic C-Means Clustering Algorithm Applied To Color Image Quantization. *Pattern Recognition*. Vol. 30. 1997. pp. 859-866.

18. Freisleben B., Schrader A. Color Quantization With A Hybrid Genetic Algorithm. *Sixth International Conference on Image Processing and Its Applications*. 1997. pp. 86-90.

19. Dekker A. Kohonen neural networks for optimal colour quantization. *Network Computation in Neural Systems*. Vol. 5. 2009. pp. 351-367.

20. Shapiro L., Stockman G. *Computer Vision*. Prentice Hall PTR. 2001. 609 p.

21. Kanan C., Cottrell G. Color-to-Grayscale: Does the Method Matter in Image Recognition? // *PLoS One*. vol. 7. 2012. URL: doi.org/10.1371/journal.pone.0029740 (date of access: 21.07.2018).

22. Hu Y.-C., Chen W.-L., LO C.-C., Chuang J.-C. Improved vector quantization scheme for grayscale image compression // *Opto-Electronics Review*. vol. 20. 2012. pp. 187-193.

23. Ramirez E., Jimenez O., Perez A., Pogrebnyak O. Grayscale Image Segmentation Based on Associative Memories // *Computations in Systems*. vol. 15. 2011. pp. 149-162.

24. Артемьев И.С., Лебедев А.И., Долгий А.И., Хатламаджиян А.Е., Меерович В.Д. Метод блочного оптического распознавания инвентарных номеров железнодорожных подвижных единиц на основе комитетной



нейроиммунной модели классификации // Инженерный вестник Дона, 2014, №1 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2259.

25. Соловьев Р.А., Тельпухов Д.В., Кустов А.Г. Автоматическая сегментация спутниковых снимков на базе модифицированной свёрточной нейронной сети UNET // Инженерный вестник Дона, 2017, №4 URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4433.

26. Агаджанян А.Г., Тоновая аппроксимация монохромных изображений двухэтапным поисковым гибридным алгоритмом финишной оптимизации // XXXI Международная научная конференция математические методы в технике и технологиях (ММТТ-31). 2018. С. 120-124.

References

1. Burger W., Burge M. Digital Image Processing. Texts in Computer Science. London: Springer. 2016. pp. 329-339.
2. Brun L., Tremeau A. The Electrical Engineering and Applied Signal Processing Series. NYC: CRC Press. 2003. 764 p.
3. Sangwine S., Horne R. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. 1998. 425 p.
4. Emre C. Image and Vision Computing. vol. 29. 2011. pp. 260-271.
5. Yue X.D., Miao D.Q., Cao L.B., Wu Q., Y.F. Pattern Recognition: vol. 47. 2014. pp. 1777-1789.
6. Neydorf R.A., Aghajanyan A.G., Vucinic D. IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). 2016. pp. 1-4.
7. Neydorf R.A., Aghajanyan A.G. Izvestiya SFEDU, Texnicheskie nauki. Taganrog: Izd. TTI SFEDU. №1-2 (186-187). 2017. pp. 133-145.
8. Neydorf R.A., Aghajanyan A.G., Neydorf A.R. Matematicheskie metodi v texnike i texnologiyax. Saratov: SGTU i. U.A. Gagarina. Vol. 1. 2017. pp. 19-26.
9. Neydorf R.A., Aghajanyan A.G., Vucinic D. IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). 2017. pp. 1-4.

10. Neydorf R.A., Aghajanyan A.G., Vucinic D. ADVCOMP 2017, The Eleventh International Conference on Advanced Engineering Computing and Applications in Sciences. IARIA. 2017. pp. 20-25.
 11. Heckbert P. SIGGRAPH '82 Proceedings of the 9th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. Boston, Massachusetts, USA: ACM. 1982. pp. 297-307.
 12. Wan, S., Wong, S., and Prusinkiewicz, P. ACM Trans. Mathematical Software. Vol. 14(2). 1988. pp. 153–162.
 13. Bouman, C. and Orchard M. IEEE Trans. Signal Processing. Vol. 39(12).1991. pp. 2677–2690.
 14. Fletcher P. Comput. Graphics. Vol. 15(3).1991. pp. 365–373.
 15. Gervautz M. and Purgathofer W. in N. Magnenat-Thalmann and D. Thalmann, Eds., New Trends in Computer Graphics, Springer-Verlag, New York. 1988. pp. 219–231.
 16. Llyod S. IEEE Trans., IT-28. 1982. pp. 129–137.
 17. Scheunders P. Pattern Recognition. Vol. 30. 1997. pp. 859-866.
 18. Freisleben B. Sixth International Conference on Image Processing and Its Applications. 1997. pp. 86-90.
 19. Dekker A. Network Computation in Neural Systems. Vol. 5. 2009. pp. 351-367.
 20. Shapiro L., Stockman G. Prentice Hall PTR. 2001. 609 p.
 21. Kanan C., Cottrell G. PLoS One. vol. 7. 2012. URL: doi.org/10.1371/journal.pone.0029740 (date of access: 21.07.2018).
 22. Hu Y.-C., Chen W.-L., LO C.-C., Chuang J.-C. Opto-Electronics Review. vol. 20. 2012. pp. 187-193.
 23. Ramirez E., Jimenez O., Perez A., Pogrebnyak O. Computations in Systems. vol. 15. 2011. pp. 149-162.
-



24. Artemyev I.S., Lebedev A.I., Dolgiy A.I., Hatlamadjyan A.E., Meerovich V.D. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2014, №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2014/2259.

25. Solovyev R.A., Telpuxov D.V., Kustov A.G. Inzhenernyj vestnik Dona (Rus), 2017, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4433.

26. Aghajanyan A.G. XXXI Matematicheskie metodi v texnike i texnologiyax (MMTT-31). 2018. pp. 120-124.