

Моделирование процесса взаимодействия вращающегося цилиндра с несмешивающимися жидкостями

М.Н. Романова, А.Е. Лебедев, Д.В. Лебедев

Ярославский государственный технический университет, Ярославль

Аннотация: В статье рассматривается работа механических абсорберов, где рабочий орган представлен в виде вращающегося цилиндра. Произведён анализ взаимодействия жидкостей и рабочего органа в подобных устройствах. Рассмотрено взаимное влияние слоёв жидкости и действие рабочего органа. Получена оценка силовых факторов динамического слоя, увлекаемого вращающимся цилиндром. Исследование, приведённое в статье, поможет в составлении инженерных методик расчета режимных и конструктивных параметров устройств.

Ключевые слова: абсорбер, эмульсионный слой, капиллярные силы, эмульсия, область статического мениска, капиллярное давление, несмешивающиеся жидкости, вращающийся цилиндр, жидкость, уравнение Навье-Стокса.

Аппараты, в качестве рабочего органа которых используется вращающийся цилиндр, частично погружённый в жидкость, нашли широкое применение во многих отраслях промышленности, включая химическую.

В подобных конструкциях механических абсорберов, в том числе предлагаемом авторами, такой цилиндр играет роль разбрызгивающего элемента. Для подобного режима использования рабочий орган должен развивать значительную скорость вращения. Эта потребность определяется тем, что для достижения требуемой дисперсности жидкой фазы вращающийся цилиндр должен осуществлять забор жидкости со скоростью, достаточной для разбрызгивания. В других аппаратах – барабанных вакуум-фильтрах, кристаллизаторах, дозаторах [1-3] и т.д. – вращающийся цилиндр осуществляет подъем жидкости без разбрызгивания.

В рассматриваемом устройстве вращающийся цилиндр используется в качестве дозатора, а жидкость, увлекаемая цилиндром, снимается скребком или другим приемным устройством, установленным с противоположной поступлению жидкости стороны барабана.

Предварительные исследования показали, что на количество поступающей в приемник жидкости могут оказывать влияние геометрические характеристики барабана, глубина его погружения, угловая скорость вращения, а также физико-химические свойства жидкости.

В связи с вышеуказанным, теоретическое определение производительности вращающегося цилиндра, частично погруженного в жидкость, представляет значительный практический интерес.

Для последующего анализа взаимодействия жидкостей и рабочего органа на рис. 1 представлена расчётная схема.

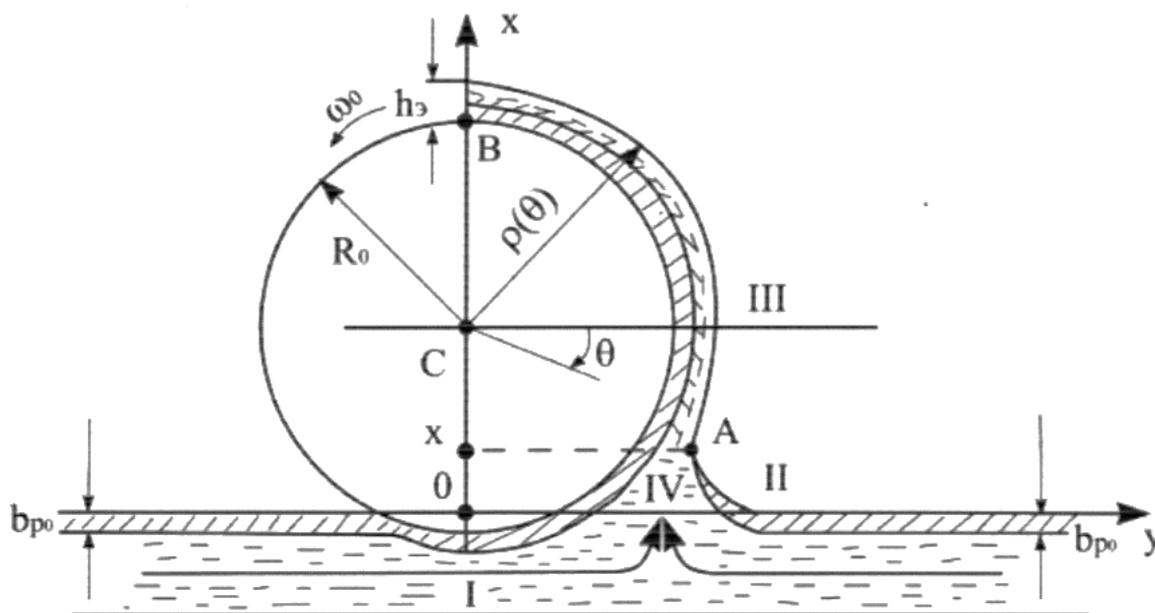


Рис.1 – Расчётная схема к образованию эмульсионного слоя на вращающемся цилиндре

Опираясь на расчётную схему, примем условное разделение этапов движения жидкостей на несколько характерных зон (обозначены римскими цифрами от I до IV). Такое допущение можно принять исходя из малых угловых скоростей ω_0 цилиндра. В качестве жидкостей рассматриваются вода и масло.

Рассмотрим первую зону (I). В данном случае цилиндр заглубляется на толщину b_{p0} масляной плёнки в соответствие с технологическими условиями. Как показали предварительные исследования, это позволяет цилиндру захватывать часть масляной плёнки и обеспечивает необходимые условия образования эмульсионной плёнки. При этом под цилиндром образуется зона увлечения воды, линии тока которой проникают в зону образования эмульсии (IV).

Во второй зоне (II) масляная плёнка приподнимается вместе с водным слоем за счет капиллярных сил и увлекаемого эмульсионного слоя, образуя при этом область статического мениска. Причем, в точке A этого мениска масляная плёнка из зоны II утоньшается, а масло из этой зоны не будет участвовать в процессе образовании эмульсии.

В четвертой зоне (IV) происходит образование эмульсии, которая в последствии поступает в зону (III).

В третьей зоне (III) происходит увлечение эмульсионного слоя вращающимся цилиндром. Причем, в точке B этой зоны образуется эмульсионный слой, расчет характеристик которого и составляет одну из основных задач и будет рассмотрен в данной статье.

В виду малых толщин эмульсионной плёнки течение жидкости в области увлечения будет определяться составляющим параметром скорости жидкости V_θ , уравнение для которой следует из уравнения Навье-Стокса [4] в полярной системе координат $(\rho(\theta), \theta)$:

$$V_\theta \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \delta_1^2} - \frac{1}{\rho_1(R_0 + b(\theta))} \cdot \frac{dR_0}{d\theta} - g \cos \theta = 0, \quad (1)$$

где координата δ_1 определена выражением:

$$\rho(\theta) = R_0 + \delta_1, \quad 0 \leq \delta_1 \leq b(\theta), \quad (2)$$

где $b(\theta)$ – толщина эмульсионной пленки.

Капиллярное давление P_σ в выражении(1), в самом общем виде, в соответствии с работами [5, 6], имеет представление

$$P_\sigma = \sigma \cdot K(\theta), \quad (3)$$

где $K(\theta)$ – кривизна свободной поверхности эмульсионной плёнки в области увлечения [7]

$$K(\theta) = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho \cdot \rho''}{[\rho^2 + (\rho')^2]^{\frac{3}{2}}}. \quad (4)$$

$$\text{Для выражения (4) прималяется } \rho' = \frac{dr}{d\theta}, \rho'' = \frac{d^2\rho}{d\theta^2}.$$

Угол θ в выражении (1) принимает значения: $\theta = \frac{-\pi}{2}$ в точке В и $\theta = \frac{\pi}{2}$ в точкеО (рис.1).

Граничными условиями для уравнения (1) будет: при $\delta_1 = 0$, $V_\theta = \omega_0 R_0$; при $\delta_1 = b$, $\frac{\partial V_\theta}{\partial \delta_1} = 0$.

Это позволяет указать представление:

$$V_\theta = \omega_0 R_0 + \left[\frac{\rho_s \cdot g \cos \theta}{\mu_s} + \frac{1}{\mu_s (R_0 + b(\theta))} \cdot \frac{dP_\sigma}{d\theta} \right] \cdot \left(\frac{\delta_1^2}{2} - b\delta_1 \right). \quad (5)$$

Откуда, воспользовавшись условием постоянства расхода

$$Q_s = \int_0^b V_\theta d\delta_1 = const, \quad (6)$$

получаем

$$Q_s = \omega_0 R_0 b - \left[(R_0 + b(\theta)) g \rho_s \cos \theta + \frac{dP_\sigma}{d\theta} \right] \cdot \frac{b^3}{3\mu_s (R_0 + b)}. \quad (7)$$

Таким образом, из уравнения (7) следует соотношение, определяющее зависимость

$$Q_s = \omega_0 R_0 b_{30}, \quad (8)$$

где b_{30} – толщина эмульсионного слоя в точке В (рис. 1).

$$\text{Действительно, в точке В } \theta = \frac{-\pi}{2}, \text{ т.е. } \cos(\theta_B) = 0, \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \delta_1^2} = 0.$$

Следовательно, $\frac{dP}{d\theta} = 0$. С другой стороны, в точке A (рис. 1) $V_{\theta} = 0$, что следует из условия сшивки зон статического мениска (II) и зоны увлечения эмульсионного слоя (III). Тогда, полагая что $\delta_1 = b_{2A}$, из уравнения (5) получаем:

$$\omega_0 R_0 = \left[\frac{\rho_2 \cdot g \cdot \cos(\theta_A)}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_2 (R_0 + b_{2A})} \cdot \frac{dP_G}{d\theta} \right] \cdot \frac{b_{2A}^3}{2}. \quad (9)$$

Из уравнения (5) в той же точке A следует соотношение

$$\frac{\omega_0 R_0 b_{20}}{b_{2A}} = \omega_0 R_0 - \left[\frac{\rho_2 \cdot g \cdot \cos(\theta_A)}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_2 (R_0 + b_{2A})} \cdot \frac{dP_G}{d\theta} \right] \cdot \frac{b_{2A}^3}{3}. \quad (10)$$

Тогда из выражений (9) и (10) можно получить соотношение

$$b_{2A} = 3b_{20}. \quad (11)$$

Коэффициент перед b_{20} определяется профилем скорости V_{θ} в выражении (4) или соответствующими граничными условиями, сформулированными при решении уравнения (1).

На рис. 2 представлена расчетная схема для определения условий сшивки решений в области IV, и описания статического мениска в области II.

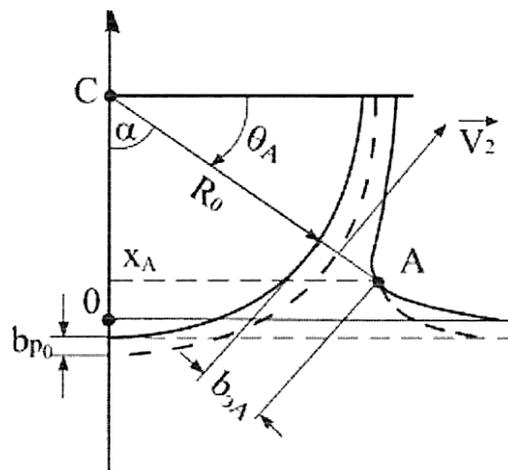


Рис. 2 – К определению условий сшивки решений

Учитывая представление для

$$P_{\sigma} = \frac{\sigma_p \frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (12)$$

получаем уравнение для определения свободной поверхности статического мениска:

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\rho_p g x^2}{\sigma_p}. \quad (13)$$

Очевидно, что при удалении от вращающегося цилиндра должны выполняться следующие условия:

$$x \rightarrow 0, \frac{dy}{dx} = -\infty. \quad (14)$$

Тогда интегрирование уравнения (13) при условиях (14) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\rho_p g x^2}{2\sigma_p} - 1. \quad (15)$$

Очевидно, что при малых угловых скоростях ω_0 происходит "загиб" свободной поверхности статического мениска "под цилиндр". Таким образом, будем полагать справедливым выполнение условия в точке А (рис. 2):

$$\frac{dy}{dx} = 0. \quad (16)$$

Тогда из уравнения (15) следует выражение, определяющее координату (17):

$$x_A = \sqrt{\frac{2\sigma_p}{\rho_p g}}. \quad (17)$$

С другой стороны, в соответствии с расчетной схемой (рис. 2) может быть указано представление для угла θ_A :

$$\sin\theta_A = \frac{R_0 - b_{p0} - y_A}{R_0 + b_{zA}} \quad (18)$$

Выражение для координаты y_A будет:

$$y_A = (R_0 + b_{zA}) \cdot \cos\theta_A \quad (19)$$

Если указывать представление для $dP_\sigma / d\theta$, учитывая выражение (4),

тогда

$$\frac{1}{\sigma'_z} \cdot \frac{dP}{d\theta} = \frac{-\rho^3 \rho' + 4\rho(\rho')^2 + 3(\rho')^3 \rho'' - 3\rho\rho' \rho'' (\rho + \rho'') + (\rho^3 + \rho(\rho')^2) \rho'''}{[\rho^2 + (\rho')^2]^{\frac{5}{2}}} \quad (20)$$

Исходя из наблюдений величина $dP_\sigma / d\theta$ определяется производными

ρ', ρ'', ρ''' или $\frac{db}{d\theta}, \frac{d^2b}{d\theta^2}, \frac{d^3b}{d\theta^3}$ в точке А, т.е. в месте сшивки решений

динамического слоя (9) и статического мениска (15).

При записи уравнения свободной поверхности статического мениска в полярной системе $(\theta, R_0 + b(\theta))$ получается

$$y = (R_0 + b(\theta)) \cdot \cos\theta, \quad (21)$$

$$x = R_0 - b_{p0} - [R_0 + b(\theta)] \cdot \sin\theta.$$

Далее необходимо определить последовательно выражения

$\frac{dy}{d\theta}, \frac{dx}{d\theta}, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2y}{d\theta^2}, \frac{d^2x}{d\theta^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^3y}{d\theta^3}$ следующие из (21), в результате чего следуют

представления для $\frac{db}{d\theta}, \frac{d^2b}{d\theta^2}, \frac{d^3b}{d\theta^3}$ в точке А:

$$\begin{aligned}
 \frac{db}{d\theta} &= [R_0 + b(\theta_A)] \cdot \operatorname{tg} \theta_A, \\
 \frac{d^2b}{d\theta^2} &= \frac{\rho_p g}{\sigma_p} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \sigma_p}{\rho_p g}} \cdot \frac{[R_0 + b(\theta_A)]^2}{\cos^3 \theta_A} + [R_0 + b(\theta_A)] \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_A), \\
 \frac{d^3b}{d\theta^3} &= \frac{\rho_p g}{\sigma_p} \cdot \frac{[R_0 + b(\theta_A)]^3}{\cos^5 \theta_A \cdot \sin \theta_A} \cdot [6 \cdot \sin \theta_A - \cos \theta_A] + \frac{5 \rho_p g}{\sigma_p} \cdot \\
 &\cdot \sqrt{\frac{2 \sigma_p}{\rho_p g}} \cdot \frac{[R_0 + b(\theta_A)]^2}{\cos^4 \theta_A} + [R_0 + b(\theta_A)] \cdot (5 \cdot 6 \cdot \operatorname{tg}^2 \theta_A).
 \end{aligned} \tag{22}$$

Можно наблюдать, что в области сшивки решений динамического и статического слоев (IV) (рис. 2), выполняются условия $x_A \ll R_0, b_{p0} \ll R_0, x_A \approx b_{2\Delta} \ll R_0$, что позволяет указать оценки

$$\sin \theta_A \approx 1 - \frac{2x_A}{R_0}, \cos \theta_A = \sqrt{\frac{2x_A}{R_0}}, \tag{23}$$

где x_A определяется координатой (17).

Тогда из выражений (22) следуют зависимости

$$\begin{aligned}
 \frac{db}{d\theta} &= [R_0 + b(\theta_A)] \cdot \operatorname{tg} \theta_A, \\
 \frac{d^2b}{d\theta^2} &= \sqrt{\frac{2 \rho_p g}{\sigma_p}} \cdot \frac{[R_0 + b(\theta_A)]^2}{\cos^3 \theta_A}, \\
 \frac{d^3b}{d\theta^3} &= \frac{-6 \rho_p g}{\sigma_p} \cdot \frac{[R_0 + b(\theta_A)]^3}{\cos^5 \theta_A}.
 \end{aligned} \tag{24}$$

Учитывая представление (20), можно получить оценку градиента капиллярного давления в точке А, входящего в уравнение (1)

$$\frac{1}{R_0 + b(\theta_A)} \cdot \frac{dR_0}{d\theta} = \frac{6 \cdot \rho_p g \sigma_p \cdot R_0}{\sigma_p \cdot x_A \cdot \left(1 - \frac{2x_A}{R_0}\right)^2}. \tag{25}$$

Таким образом, получена оценка силовых факторов, входящих в уравнение (10) динамического слоя, увлекаемого вращающимся цилиндром.

Литература

1. Jeffbeys. Proc. Cambr. Phil. Soc.,-1930, S. 26, 204 p.

2. Смирнов А.А. Исследование гидродинамических режимов работы и определение производительности барабанного дозатора / А.А. Смирнов, М.Б.Генералов, В.А.Юрченко // Гидродинамика, компрессоры и насосы химических производств. М.: Машиностроение, 1973. -с. 156-161.

3. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. - М.: Физматгиз, 1952. - 670с.

4. Гельперин И.И. Определение толщины жидкой пленки, остающейся на поверхности твердого тела при его извлечении из жидкости / И.И.Гельперин, Г.А.Носов, А.В.Макотин // Теор. основы хим. Технологии- 1971,- т.5, № 3- с.429-437.

5. Бронштейн И.Н. Справочник по высшей математике / И.Н.Бронштейн, К.А.Семендяев.- М.: Наука, 1986.- 544с.

6. Look R. C. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1951.V.4. -p.42.

7. Плановский А.Н. Процессы и аппараты химической технологии / А.Н.Плановский, В.М.Рамм, С.Э.Качан.- М.: Госхимиздат, 1962.- 847с.

8. Лебедев А. Е., Романова М.Н. Математическое описание дисперсных потоков неоднородных жидкостей //Инженерный вестник Дона, 2018, №3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5160.

9. Лебедев А. Е., Лебедев Д. В., Романова М.Н. К расчету стохастической энергии при моделировании структуры расширяющихся дисперсных потоков // Инженерный вестник Дона, 2018, №4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5268.

10. Tharmalingam S., Wilkinson W.W. The coating of newtonion liquids onto a rotating voll // I.Chem. Eng. Sei. 1978. V.33. - pp.1481 - 1487.

References

1. Jeffbeys. Proc. Cambr. Phil. Coe. 1930.S. 26, 204 p.



2. Smirnov A. A., Generalov M. B., Yurchenko V. A. *Gidrodinamika, kompressory i nasosy khimicheskikh proizvodstv* [Fluid dynamics, compressors and pumps for chemical production]. Mashinostroyeniye. 1973. pp. 156-161.
3. Levich V. G. *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* [Physico-chemical hydrodynamics]. Fizmatgiz. 1952. 670p.
4. Gel'perin I. I., Nosov G. A., Makotin A.V. *Teor. Osnovy khim. Tekhnologii*. 1971. V.5. № 3. pp. 429-437.
5. Bronshteyn I. N., Semendyayev K. A. *Spravochnik po vysshey matematike* [Handbook of advanced mathematics]. Nauka, 1986. 544 p.
6. Look R. C. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1951.V.4. p.42.
7. Planovskiy A. H., Ramm V. M., Kachan S.E. *Protsessy i apparaty khimicheskoy tekhnologii* [Processes and devices of chemical technology]. Goskhimizdat. 1962. 847 p.
8. Lebedev A. E., Romanova M. N. *Inženernyj vestnik Dona (Rus)*. 2018. № 3. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2018/5160.
9. Lebedev A. E., Lebedev D.V., Romanova M. N. *Inženernyj vestnik Dona (Rus)*. 2018. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5268.
10. Tharmalingam S., Wilkinson W.W. The coating of newtonion liquids onto a rotating voll.I.Chem. Eng. Sei. 1978. V.33. pp.1481-1487.