Конечно-элементное моделирование ползучести пластин произвольной формы

А.С. Чепурненко, А.В. Сайбель, А.А. Савченко

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Аннотация: В статье приведен вывод уравнений изгиба треугольного конечного элемента пластины с учетом ползучести. При выводе уравнений используется вариационный принцип Лагранжа. Задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Полученные уравнения позволяют рассчитывать пластинки произвольной формы с учетом вязкоупругих свойств материала. Приведен пример расчета прямоугольной полимерной пластинки из вторичного ПВХ, шарнирно опертой по контуру и загруженной равномерно распределенной по площади нагрузкой. В качестве закона, устанавливающего связь между деформациями ползучести и напряжениями, используется нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича. Представлены графики изменения во времени напряжений и прогиба. Напряжения в процессе ползучести меняются несущественно, разница между напряжениями в начале и в конце процесса ползучести не превышает 6%.
Ключевые слова: ползучесть, метод конечных элементов, изгиб пластин, полимеры, уравнение Максвелла-Гуревича, длительная цилиндрическая жесткость.

Известно, что для многих конструкционных материалов характерно явление ползучести, т.е. развитие во времени деформаций при постоянных нагрузках. В то же время на данный момент отсутствуют общие методы расчета конструкций и их элементов с учетом реологии материала. В литературе приводятся некоторые частные решения для стержневых элементов [1-4], пластин [5] и оболочек [6]. В работе [5] рассматривается методика расчета прямоугольных пластин с учетом ползучести методом конечных разностей, однако данная методика неприменима для пластин произвольной формы.

В настоящей статье приводится вывод уравнений изгиба с учетом ползучести для плоского треугольного конечного элемента, что позволяет рассчитывать пластины произвольной формы.

Рассматриваемый конечный элемент представлен на рис. 1. В каждом из его узлов имеется 3 степени свободы: прогиб w_i и 2 угла поворота φ_{ix} и φ_{iy}. Поле перемещений конечного элемента записывается в виде:

$$\{U\}=\begin{Bmatrix}\{\rho_1\}\\ \{\rho_2\}\\ \{\rho_3\}\end{Bmatrix}, \qquad (1)$$

где $\{\rho_i\}=\{w_i \quad \varphi_i^x \quad \varphi_i^y\}^T=\left\{w_i \quad -\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_i \quad -\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_i\right\}^T$.

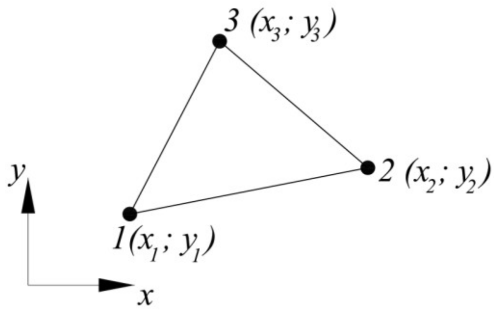

Рис. 1. – Треугольный конечный элемент пластины

Для функции прогиба принимается следующая аппроксимация, которая также используется в работе [7]:

$$w=\beta_1 L_1+\beta_2 L_2+\beta_3 L_3+\beta_4(L_2^2 L_1+\frac{1}{2}L_1 L_2 L_3)+\ldots+\beta_9(L_1^2 L_3+\frac{1}{2}L_1 L_2 L_3), \qquad (2)$$

где $\beta_{1\ldots9}$ – неопределенные коэффициенты, L_1, L_2, L_3 – L-координаты, определяемые следующим образом:

$$L_i=\frac{1}{2A}\left(a_i+b_i x+c_i y\right), i=1\ldots3,$$

где $A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}$ – площадь конечного элемента,

$a_1=x_2 y_3-x_3 y_2, b_1=y_2-y_3, \quad c_1=x_3-x_2$.

Остальные коэффициенты a_i, b_i, c_i определяются путем циклической замены индексов . Постоянные $\beta_{1\ldots9}$ можно найти, подставив в выражение (2) узловые значения прогибов и углов поворота. При этом возникает необходимость дифференцирования по координатам x и y.

Производные по декартовым координатам вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial L_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_1}+\frac{\partial L_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_2}+\frac{\partial L_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_3}=\frac{1}{2A}\left(b_1\frac{\partial}{\partial L_1}+b_2\frac{\partial}{\partial L_2}+b_3\frac{\partial}{\partial L_3}\right);\\ \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial L_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial L_1}+\frac{\partial L_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial L_2}+\frac{\partial L_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial L_3}=\frac{1}{2A}\left(c_1\frac{\partial}{\partial L_1}+c_2\frac{\partial}{\partial L_2}+c_3\frac{\partial}{\partial L_3}\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Окончательно функция прогибов записывается в виде:

$$w=\{\{N_1\}\quad\{N_2\}\quad\{N_3\}\}\{U\}, \tag{4}$$

где $\{N_1\}$, $\{N_2\}$, $\{N_3\}$ – функции формы.

$$\{N_1\}^T=\begin{Bmatrix} L_1+L_1^2L_2+L_1^2L_3-L_1L_2^2-L_1L_3^2 \\ b_3(L_1^2L_2+\frac{1}{2}L_1L_2L_3)-b_2(L_3L_1^2+\frac{1}{2}L_1L_2L_3) \\ c_3(L_1^2L_2+\frac{1}{2}L_1L_2L_3)-c_2(L_3L_1^2+\frac{1}{2}L_1L_2L_3)\end{Bmatrix}. \tag{5}$$

Выражения для $\{N_2\}$ и $\{N_3\}$ также можно получить путем циклической замены индексов.

При выводе уравнений используется вариационный принцип Лагранжа. Потенциальная энергия деформации пластинки определяется следующим образом:

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_V\{\sigma\}^T\left\{\varepsilon^{el}\right\}dV, \tag{6}$$

где $\{\sigma\}^T=\{\sigma_x\quad\sigma_y\quad\tau_{xy}\}$ – вектор напряжений, $\left\{\varepsilon^{el}\right\}$– вектор упругих деформаций, которые представляют разность между полными деформациями и деформациями ползучести:

$$\{\varepsilon^{el}\}=\{\varepsilon\}-\left\{\varepsilon^*\right\}=\left\{\varepsilon_x\quad\varepsilon_y\quad\gamma_{xy}\right\}^T-\left\{\varepsilon_x^*\quad\varepsilon_y^*\quad\gamma_{xy}^*\right\}^T. \tag{7}$$

Деформации связаны с напряжениями следующим образом:

$$\{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon^*\}), \tag{8}$$

где $[D]=\dfrac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}$ – матрица упругих постоянных.

Вектор полных деформаций определяется следующим образом:

$$\{\varepsilon\} == -z\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix} = -z\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2\{N\}}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial^2\{N\}}{\partial y^2}\\ 2\dfrac{\partial^2\{N\}}{\partial x\partial y}\end{bmatrix}\{U\} = -z[B]\{U\}. \qquad (9)$$

Элементы матрицы $[B]$ являются функциями от x и y. Данная матрица нами была получена в символьном виде в математическом пакете Matlab и здесь не приводится ввиду ее громоздкости.

С учетом (9) векторы напряжений и упругих деформаций записываются в виде:

$$\left\{\varepsilon^{el}\right\} = -z[B]\{U\} - \{\varepsilon^*\}; \quad \{\sigma\} = -z[D][B]\{U\} - [D]\{\varepsilon^*\}. \qquad (10)$$

Подставив (10) в (6), получим:

$$\mathit{П} = \frac{1}{2}(\int_V z^2\{U\}^T[B]^T[D][B]\{U\}dV + \int_V\{\varepsilon^*\}[D]z[B]\{U\}dV +$$

$$+\int_V z\{U\}^T[B]^T[D]\{\varepsilon^*\}dV + \int_V\{\varepsilon^*\}^T[\mathrm{D}]\{\varepsilon^*\}dV) = \frac{1}{2}\{U\}^T\frac{h^3}{12}\int_A[B]^T[D][B]dA\{U\} +$$

$$+\{U\}^T\int_A[B]^T[D]dA\cdot\int_{-h/2}^{h/2}\{\varepsilon^*\}zdz.$$

Если на элемент действует равномерно распределенная нагрузка, то работа внешних сил записывается в виде:

$$A = \int_A qw(x,y)dA = \{U\}^T q\int_A\begin{bmatrix}\{N_1\}^T\\ \{N_2\}^T\\ \{N_3\}^T\end{bmatrix}dA =$$

$$=\{U\}^T \frac{qA}{3}\left\{1 \quad \frac{b_3-b_2}{8} \quad \frac{c_3-c_2}{8} \quad 1 \quad \frac{b_1-b_3}{8} \quad \frac{c_1-c_3}{8} \quad 1 \quad \frac{b_2-b_1}{8} \quad \frac{c_2-c_1}{8}\right\}^T.$$

После минимизации полной энергии $Э = П - A$ по узловым перемещениям задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{U\} = \{F\} + \{F^*\}, \tag{11}$$

где $[K] = \frac{h^3}{12}\int\limits_A [B]^T [D][B]dA$ – матрица жесткости, $\{F\}$ – вектор внешних узловых нагрузок, $\{F^*\} = \int\limits_A [B]^T [D]dA \cdot \int\limits_{-h/2}^{h/2} \{\varepsilon^*\}zdz$ – вклад деформаций ползучести в вектор узловых нагрузок.

Интегралы по площади в выражениях для $[K]$ и $\{F^*\}$ вычисляются численно. В матрицу жесткости и вектор нагрузки входят члены со степенью не выше второй, поэтому интегрирование будет точным при использовании всего лишь трех точек (середин сторон элемента) [7]. Формула интегрирования записывается в виде:

$$\int\limits_A f(x,y)dA = \frac{A}{3}\left(f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)\right).$$

Интегралы по толщине пластинки вычисляются методом трапеций.

Был выполнен расчет прямоугольной шарнирно опертой по контуру пластинки, загруженной равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 2).

Материал пластинки – вторичный ПВХ, модуль упругости $E = 1480$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, величина нагрузки $q = 2$ кПа, размеры пластины: $a = 0.8$ м, $b =$ 0.6 м, толщина пластинки $h = 2$ см. В качестве закона ползучести использовалось нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича, которое при плоском напряженном состоянии записывается в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial t} = \frac{f_{ij}^*}{\eta^*}, \quad i = x, y, \quad j = x, y,$$

где f_{ij}^* – функция напряжений, η^* – релаксационная вязкость.

$f_{ij}^* = \frac{3}{2}(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) - E_\infty \varepsilon_{ij}^*$, где $p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3}$ – среднее напряжение, δ_{ij} – символ Кронекера, E_∞ – модуль высокоэластичности.

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*} \exp\left(\frac{\left|f_{\max}^*\right|}{m^*}\right),$$

где η_0^* – начальная релаксационная вязкость, m^* – модуль скорости.

Для сдвиговой деформации ползучести: $\gamma_{xy}^* = 2\varepsilon_{xy}^*$.

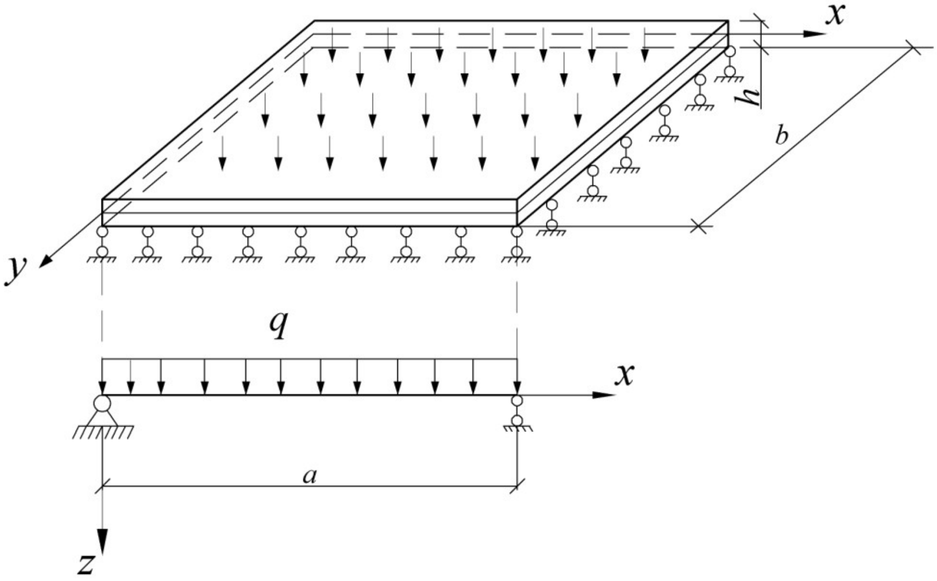

Рис. 2. – Расчетная схема пластинки

Реологические параметры ПВХ при различных температурах приводятся в работах [8-9]. При $t = 20°C$: $E_\infty = 5990$ МПа, $\eta_0^* = 9.06 \cdot 10^5$ МПа·мин, $m^* = 12.6$ МПа.

Полученный в результате график роста прогиба в центре пластины представлен на рис. 3. Отметим, что для пластин, материал которых подчиняется уравнению Максвелла-Гуревича, отношение прогибов при $t \to \infty$ и $t = 0$ должно быть равно:

$$\frac{w(\infty)}{w(0)} = \frac{D}{D_\infty},$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластинки, D_∞ – длительная цилиндрическая жесткость, впервые введенная в работе [10].

$$D_\infty = \frac{\alpha h^3}{12(\alpha^2 - \beta^2)} \, ,$$

где $\alpha = \dfrac{1}{E} + \dfrac{1}{E_\infty}, \beta = \dfrac{\nu}{E} + \dfrac{1}{2E_\infty}.$

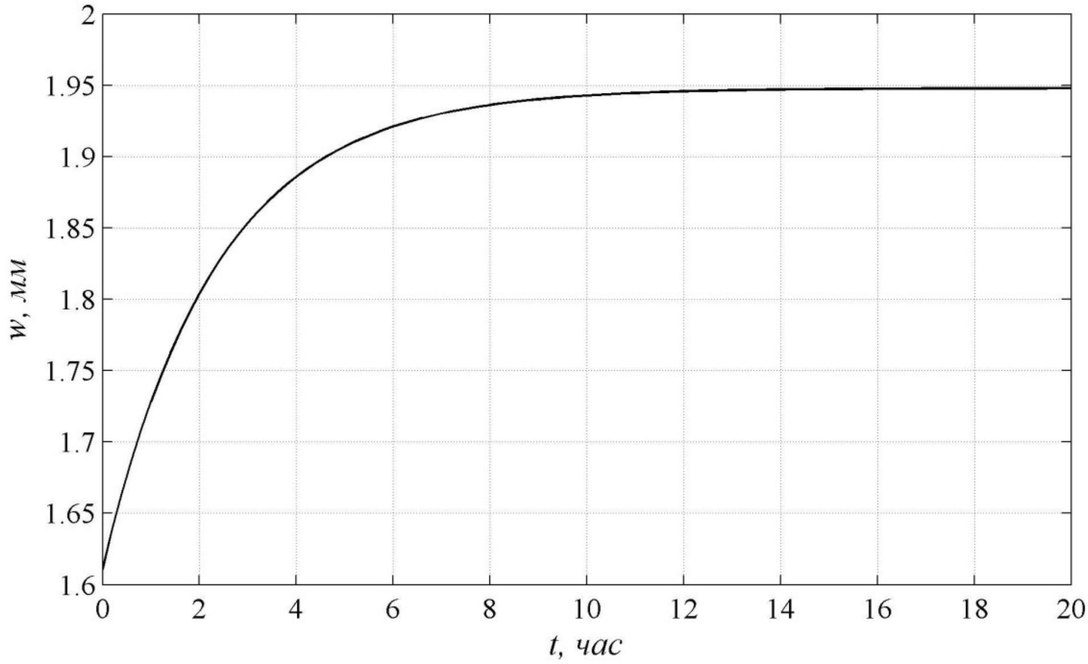

Рис. 3. – График роста прогиба в центре пластины

По результатам численного расчета отношение $w(\infty)/w(0)$ составило 1.2092, что отличается от точного значения на 0.26% и свидетельствует о достоверности полученных уравнений и методики.

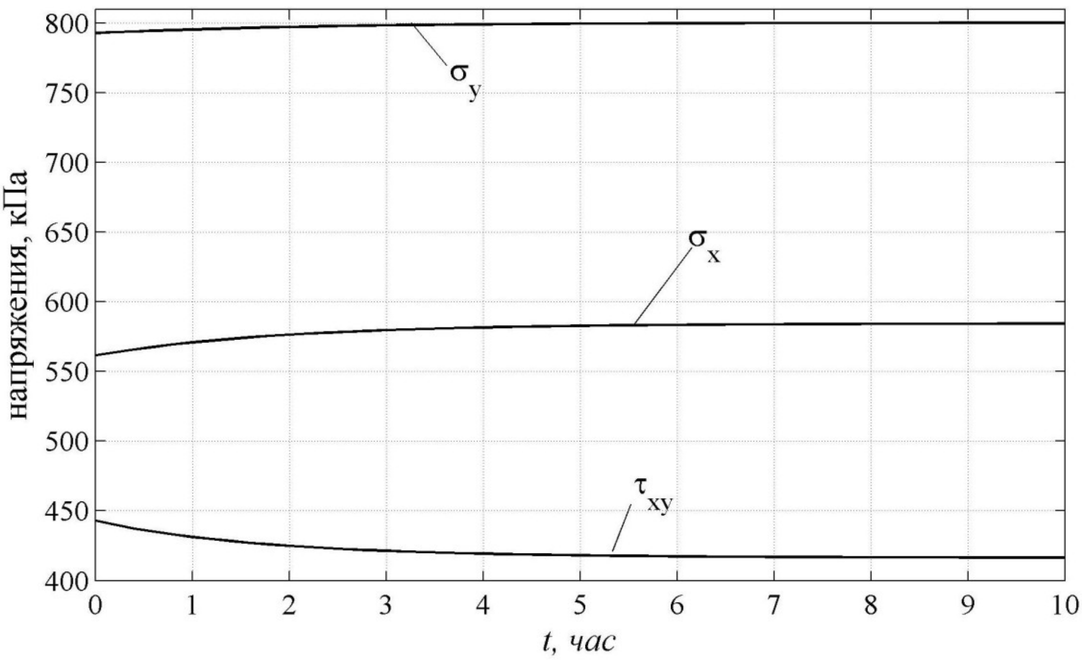

Рис. 4. – Изменение во времени наибольших напряжений

На рис. 4 представлены графики изменения во времени наибольших напряжений. Напряжения σ_y выросли на 0.93%, σ_x – на 4.05 %, наибольшие касательные напряжения снизились на 6%.

Литература

1. Козельская М.Ю., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Применение метода Галёркина при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести // Инженерный вестник Дона. 2013. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1714

2. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Energy method in the calculation stability of compressed polymer rods considering creep // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 1004-1005. pp. 257-260.

3. Козельская М.Ю., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Расчет на устойчивость сжатых полимерных стержней с учетом температурных воздействий и высокоэластических деформаций // Научно-технический вестник Поволжья. 2013. № 4. С. 190-194.

4. Чепурненко А.С., Языев Б.М. Оптимизация формы поперечного сечения сжатых стержней из условия устойчивости // Научное обозрение. 2012. № 6. С. 202-204.

5. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. On the bending of a thin polymer plate at nonlinear creep // Advanced Materials Research. 2014. Vol. 900. pp. 707-710.

6. Дудник А.Е., Чепурненко А.С., Никора Н.И. Плоская осесимметричная задача термовязкоупругости для полимерного цилиндра // Инженерный вестник Дона. 2015. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1p2y2015/2816

7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 538 с.

8. Chepurnenko A.S., Beskopylnyi A.N., Jazyev B.M., Andreev V.I. Determination of rheological parameters of polyvinylchloride at different temperatures // MATEC Web of Conferences. 2016. URL: matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2016/30/matecconf_smae2016_06059.pdf

9. Дудник А.Е., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Определение реологических параметров поливинилхлорида с учетом изменения температуры // Пластические массы. 2016. № 1-2. С. 30-33.

10. Андреев В.И., Языев Б.М., Чепурненко А.С. Осесимметричный изгиб круглой гибкой пластинки при ползучести // Вестник МГСУ. 2014. № 5. С. 16-24.

References

1. Kozel'skaya M.Yu., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2013. №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2013/1714

2. Andreev V.I., Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Advanced Materials Research. 2014. Vol. 1004-1005. pp. 257-260.

3. Kozel'skaya M.Yu., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V. Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya. 2013. № 4. pp. 190-194.

4. Chepurnenko A.S., Yazyev B.M. Nauchnoe obozrenie. 2012. № 6. pp. 202-204.

5. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. Advanced Materials Research. 2014. Vol. 900. pp. 707-710.

6. Dudnik A.E., Chepurnenko A.S., Nikora N.I. Inženernyj vestnik Dona (Rus), 2015. №1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1p2y2015/2816

7. Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike [Finite element method in engineering science]. M.: Mir, 1975. 538 p.

8. Chepurnenko A.S., Beskopylnyi A.N., Jazyev B.M., Andreev V.I. MATEC Web of Conferences. 2016. URL: www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2016/30/matecconf_smae2016_06059.pdf

9. Dudnik A.E., Chepurnenko A.S., Litvinov S.V. Plasticheskie massy. 2016. № 1-2. pp. 30-33.

10. Andreev V.I., Yazyev B.M., Chepurnenko A.S. Vestnik MGSU. 2014. № 5. pp. 16-24.