

## Оценка влияния жесткости упругого основания на собственные частоты колебаний здания

*Н.Ю. Цыбин*

*Национальный исследовательский университет Московский государственный строительный университет*

**Аннотация:** Основными характеристиками здания, необходимыми для выполнения динамического расчета, являются частота и форма собственных колебаний, которые напрямую связаны с его жесткостью, массой, а также жесткостью упругого основания. Для оценки влияния жесткости упругого основания рассмотрена эквивалентная идеализированная модель свободных колебаний консольного стержня, имеющего податливую заделку. Для рассмотренной модели получено трансцендентное уравнение, а также его численное решение, позволяющее проанализировать влияние жесткости упругого основания на собственные частоты поступательных форм колебаний. Выявлено, что с увеличением жесткости упругого основания увеличиваются частоты собственных колебаний, однако влияние ограничено и имеет асимптотический характер. Установлено, что жесткость упругого основания может оказывать существенное влияние на собственные частоты первых пяти изгибных форм колебаний и для форм более высокого порядка может не учитываться.

**Ключевые слова:** динамика, собственные колебания, собственные частоты, здание, сооружение, трансцендентное уравнение, упругое основание, упругая опора.

### Введение

Вопросы колебаний различных конструкций рассматриваются научным сообществом давно. Несмотря на большое число уже опубликованных работ, активные исследования в данной области продолжаются и в настоящее время.

Одним из наиболее важных этапов решения динамических задач является отыскание собственных частот и форм колебаний. В контексте строительных конструкций решение динамических задач [1, 2] чаще всего выполняется при исследовании поведения здания при сейсмических и ветровых воздействиях.

Известно, что собственные частоты колебаний в существенной степени зависят от граничных условий [3, 4]. В целях качественного анализа влияния жесткости упругого основания рассмотрим идеализированную модель здания в виде стержня, с податливой заделкой в уровне фундамента и свободным

---

верхом. Совместим продольную ось стержня с координатой  $x$ ,  $0 \leq x \leq h$ , где  $h$  – высота здания. Поперечное сечение здания примем в виде прямоугольника с габаритами  $b \times l$ , причем  $b$  – размер вдоль оси  $y$ , а  $l$  – вдоль оси  $z$ . Колебания рассматриваются в плоскости  $xOy$  (относительно оси  $z$ ). Похожая задача исследовалась в работе [5].

Общий вид модели здания и идеализированная модель, рассматриваемая в данной статье, приведены на рис. 1.

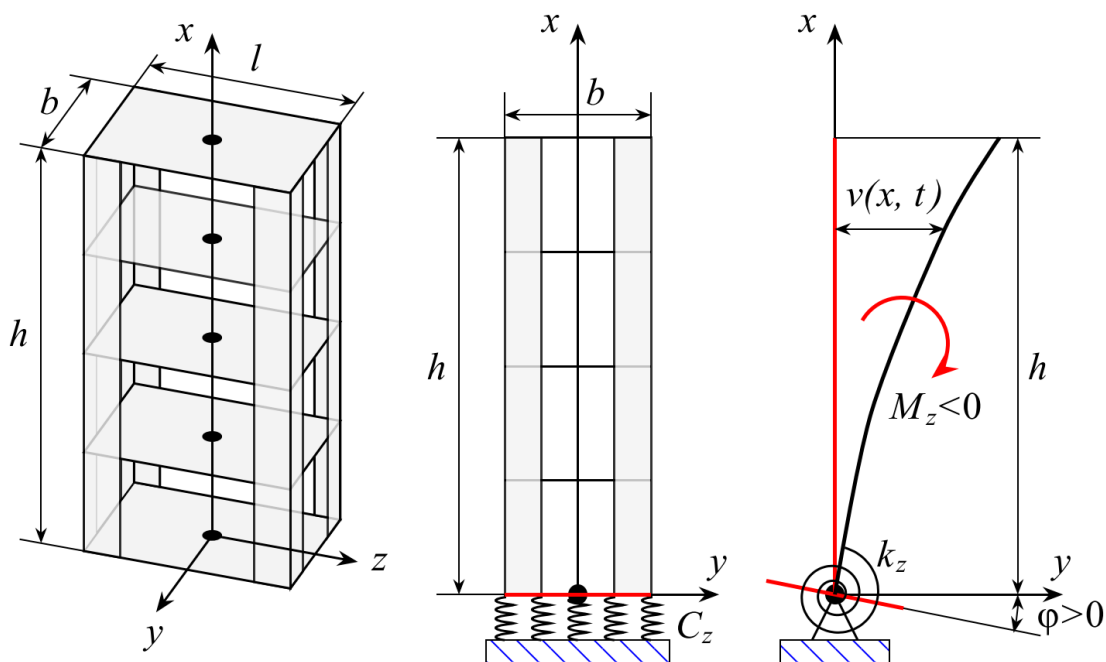


Рис. 1. – Модель здания и ее идеализированное представление

Очевидно, что рассматриваемая идеализированная модель обладает рядом существенных недостатков, например, невозможность учета податливости горизонтальных конструкций, возникновение изгибных деформаций в отдельных вертикальных элементах каркаса здания, невозможность нахождения крутильных форм колебания. Однако, указанные недостатки не препятствуют качественной оценке влияния жесткости упругого основания.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня без учета демпфирования [6] в случае постоянной жесткости  $EI_z = \text{const}$  имеет вид:

$$\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = \frac{p(x,t)}{EI_z}. \quad (1)$$

В данном уравнении (1)  $x$  – переменная, отсчитываемая вдоль стержня;  $t$  – время;  $v(x,t)$  – горизонтальные перемещения точек стержня;  $E$  – модуль упругости материала стержня;  $I_z$  – момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси  $z$ ;  $p(x,t)$  – суммарная линейная распределенная поперечная нагрузка.

Применительно к зданию, величина  $I_z$  представляет собой момент инерции поперечного сечения вертикальных конструкций относительно оси  $z$ , проходящей через центр тяжести этажа.

Суммарная нагрузка  $p(x,t)$  представляет собой сумму внешней нагрузки и инерционной составляющей, т.е:

$$p(x,t) = q(x,t) - m(x) \cdot a(x,t). \quad (2)$$

В данному уравнении  $q(x,t)$  – внешняя линейная распределенная поперечная нагрузка;  $m(x)$  – погонная масса стержня в точке с координатой  $x$ ;  $a(x,t)$  – ускорение точки с координатой  $x$  в момент времени  $t$ .

В реальных расчетных схемах зданий массы, как правило, сосредоточены [7, 8] в уровне горизонтальных конструкций. Подобный дискретный подход несет с собой ряд плюсов и минусов. К плюсам можно отнести относительную простоту итогового характеристического уравнения. К минусам – усложнение качественного анализа результатов.

Ускорение, как известно, является второй производной перемещения по времени, а масса в рассматриваемом случае есть произведение плотности на площадь поперечного сечения стержня  $m = \rho A$ . В результате получим:

$$p(x,t) = q(x,t) - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x,t) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Здесь  $\rho$  – плотность материала стержня;  $A$  – площадь поперечного сечения стержня. Данные величины приняты постоянными вдоль  $x$ .

Учитывая (3) перепишем уравнение (1).

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{m}{EI_z} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{q(x,t)}{EI_z}. \quad (4)$$

### Решение задачи

Решение уравнения (4) в частных производных можно получить методом разделения переменных, если представить функцию  $v(x,t)$  в следующем виде:

$$v(x,t) = X(x) \cdot T(t) = V(x) \cdot \sin(\omega t + a_0), \quad (5)$$

где  $\omega$  – собственная круговая частота колебаний, измеряемая в радиан/время;  $a_0$  – сдвиг фазы колебаний.

Учитывая (5), можно вычислить скорости колебаний.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = V(x) \cdot \omega \cos(\omega t + a_0).$$

Аналогично найдем ускорения колебаний.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -V(x) \cdot \omega^2 \sin(\omega t + a_0) = -\omega^2 v(x,t). \quad (6)$$

После подстановки (5) в уравнение (4) с учетом (6) и  $q(x,t) = 0$  (что справедливо для свободных колебаний), получим:

$$\left( \frac{d^4 V}{dx^4} - \beta^4 V \right) \sin(\omega t + a_0) = 0. \quad (7)$$

В уравнении (7) введена переменная  $\beta$ , вычисляемая по формуле:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI_z} \rightarrow \omega = \beta^2 \cdot \sqrt{\frac{EI_z}{m}}. \quad (8)$$

Очевидно, что уравнение (7) выполняется в случае, если:

$$\frac{d^4V}{dx^4} - \beta^4V = 0. \quad (9)$$

Ниже записано решение уравнения (9).

$$V(x) = C_1 \sinh(\beta x) + C_2 \cosh(\beta x) + C_3 \sin(\beta x) + C_4 \cos(\beta x). \quad (10)$$

Для нахождения констант интегрирования, входящих в (10) необходимо четыре граничных условия. В рассматриваемой задаче они имеют вид:

$$M_z(h) = 0; \quad Q_y(h) = 0; \quad v(0) = 0; \quad M_z(0) = -k_z \varphi(0). \quad (11)$$

Здесь  $k_z$  – жесткость заделки при повороте относительно оси  $z$  (сила · длина/рад);  $h$  – длина стержня (высота здания). Знак минус, во четвертом граничном условии (11) является следствием того, что положительному углу поворота стержня соответствует отрицательный момент (см. рис. 1). Податливостью упругого основания на сдвиг пренебрегаем.

Жесткость заделки  $k_z$  фактически представляет собой жесткость упругого основания [4], с которым взаимодействует фундаментная плита. Подобный подход, позволяющий учесть податливость опор, рассматривается также при исследовании продольных колебаний стержней, например, в работах [9, 10].

Определим величину  $k_z$  исходя из следующих соображений:

1. Фундаментная плита здания обладает такой жесткостью, что при повороте здания на некоторый угол  $\varphi$  относительно оси  $z$  ее изгибными деформациям можно пренебречь.

2. Упругое основание с достаточной точностью описывается моделью Винклера.

При повороте фундаментной плиты относительно оси  $z$  на угол  $\varphi$ , величина момента, создаваемого упругим основанием составит:

$$M_z = -\iint_{A_f} y P_z dA. \quad (12)$$

В данной формуле  $A_f$  – площадь фундаментной плиты;  $y$  – расстояние до элементарной площадки  $dA$ , в которой действует распределенное усилие  $P_z$  вызванное деформацией упругого основания.

Знак минус в формуле (12) играет такую же роль, как и в четвертом граничном условии (11).

В случае, если основание описывается моделью Винклера, то реализуется линейная связь между возникающим усилием и деформацией  $\delta$ :

$$P_z = C_z \delta. \quad (13)$$

Учитывая высокую жесткость фундаментной плиты, деформации  $\delta$  распределены по площади  $A_f$  по линейному закону, т.е.:

$$\delta = \varphi y. \quad (14)$$

Подставляя в формулу (12) выражения (13) и (14) получим:

$$M_z = -\iint_{A_f} y C_z \varphi y dA = -\bar{C}_z \varphi \iint_{A_f} y^2 dA = -\bar{C}_z \varphi I_{z,f}, \quad (15)$$

где  $I_{z,f}$  – момент инерции фундаментной плиты. В случае, если габариты фундаментной плиты совпадают с габаритами здания  $b \times l$ :

$$I_{z,f} = \frac{lb^3}{12}. \quad (16)$$

Так как коэффициенты постели  $C_z$  в реальных конструкциях изменяются в пределах фундаментных плит, в формуле (15) использован усредненный коэффициент постели  $\bar{C}_z$ . Данную величину можно найти из условия равенства моментов, создаваемых упругим основанием с переменным коэффициентом постели и усредненным, т.е.:

$$\bar{C}_z = \frac{1}{I_{z,f}} \iint_{A_f} C_z y^2 dA. \quad (17)$$

Сравнивая между собой четвертое граничное условие (11) и формулу (15), можно найти жесткость заделки.

$$k_z = \bar{C}_z I_{z,f}. \quad (18)$$

Другие модели упругого основания, в том числе с учетом податливости в горизонтальном направлении, можно найти в [4, 11].

Углы поворота, изгибающие моменты и поперечные силы в стержне можно найти из функции перемещений с использованием известных в балочной теории выражений:

$$\varphi = \frac{\partial v}{\partial x}; \quad M_z = -EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \quad Q_y = -EI_z \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}. \quad (19)$$

Учитывая разложение (5) и формулы (19), запишем граничные условия (11) для функции  $V(x)$ .

$$\left. \frac{d^2 V}{dx^2} \right|_{x=h} = 0; \quad \left. \frac{d^3 V}{dx^3} \right|_{x=h} = 0; \quad V(0) = 0; \quad \left. \frac{d^2 V}{dx^2} \right|_{x=0} - \frac{k_z}{EI_z} \left. \frac{dV}{dx} \right|_{x=0} = 0. \quad (20)$$

После подстановки функции  $V(x)$  из (10) в граничные условия (20), получим систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$[A] \cdot \bar{C} = 0, \quad (21)$$

где

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{k_z}{EI_z} & \beta & -\frac{k_z}{EI_z} & -\beta \\ \sinh(\beta h) & \cosh(\beta h) & -\sin(\beta h) & -\cos(\beta h) \\ \cosh(\beta h) & \sinh(\beta h) & -\cos(\beta h) & \sin(\beta h) \end{bmatrix}; \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}.$$

Решение системы уравнений (21) будет нетривиальным только в том случае, если определитель матрицы  $[A]$  равен нулю. В результате получим трансцендентное уравнение вида:

$$\psi [\cos(\psi) \sinh(\psi) - \sin(\psi) \cosh(\psi)] + \eta [1 + \cos(\psi) \cosh(\psi)] = 0. \quad (22)$$

Здесь использованы обозначения:

$$\psi = \beta h \rightarrow \beta = \frac{\psi}{h}; \quad \eta = \frac{k_z h}{EI_z}. \quad (23)$$

Оценим порядок величины коэффициента  $\eta$ . Учитывая тот факт, что коэффициенты постели упругого основания могут изменяться в диапазоне нескольких порядков, можно сразу сделать вывод, что аналогичным диапазоном значений будет обладать и коэффициент  $\eta$ . Однако, для дальнейших расчетов необходимо определить именно численные значения верхней и нижней границы. Для этого подставим в третье равенство (23) полученную ранее формулу жесткости заделки (18).

$$\eta = \frac{\bar{C}_z I_{z,f} h}{EI_z} = \frac{\bar{C}_z I_{z,f} h}{E k_s I_{z,f}} = \frac{\bar{C}_z h}{E k_s}. \quad (24)$$

В данной формуле  $k_s$  – конструктивный коэффициент, равный соотношению между моментом инерции вертикальных конструкций  $I_z$  и моментом инерции площади, ограниченной контуром фундаментной плиты  $I_{z,f}$ , т.е.:

$$k_s = \frac{I_z}{I_{z,f}}.$$

При равномерном расположении вертикальных конструкций, а также равенстве площади этажа здания площади фундаментной плиты, данный коэффициент равен соотношению площади поперечного сечения вертикальных конструкций к площади этажа.

Для приблизительной численной оценки верхней и нижней границы значений  $\eta$  по формуле (24) рассмотрим два случая:

1. Железобетонный каркас здания ( $E = 30 \cdot 10^3$  МПа), имеющий конструктивный коэффициент  $k_s = 0.0035$  (колонны  $300 \times 750$  мм, с шагом



8×8 м), расположенный на скальном грунте с коэффициентом постели  $\bar{C}_z = 10^4$  МПа/м. В этом случае значение коэффициента  $\eta$  составит:

$$\eta = \frac{10^4 \cdot h}{30 \cdot 10^3 \cdot 0.0035} = \frac{95.2 \cdot h}{\text{м}}.$$

2. Для второго случая примем конструктивный коэффициент  $k_s = 0.018$  (колонны 400×400 мм, с шагом 3×3 м). Грунт пластичный с коэффициентом постели  $\bar{C}_z = 1$  МПа/м. Тогда коэффициент  $\eta$  будет равен:

$$\eta = \frac{1 \cdot h}{30 \cdot 10^3 \cdot 0.018} = \frac{0.0019 \cdot h}{\text{м}}.$$

Найденные значения являются ориентировочными.

Таким образом, с учетом высоты здания  $3 \leq h \leq 828$  м, значение коэффициента  $\eta$  лежит в приблизительном интервале  $10^{-3} \leq \eta \leq 10^4$ .

Аналитического решение уравнения (22) на данный момент не существует. Его решение возможно численно, либо графически. На рис. 2 приведены результаты вычисления первых двух корней  $\psi_1$  и  $\psi_2$  уравнения (22) в зависимости от  $\eta$ .

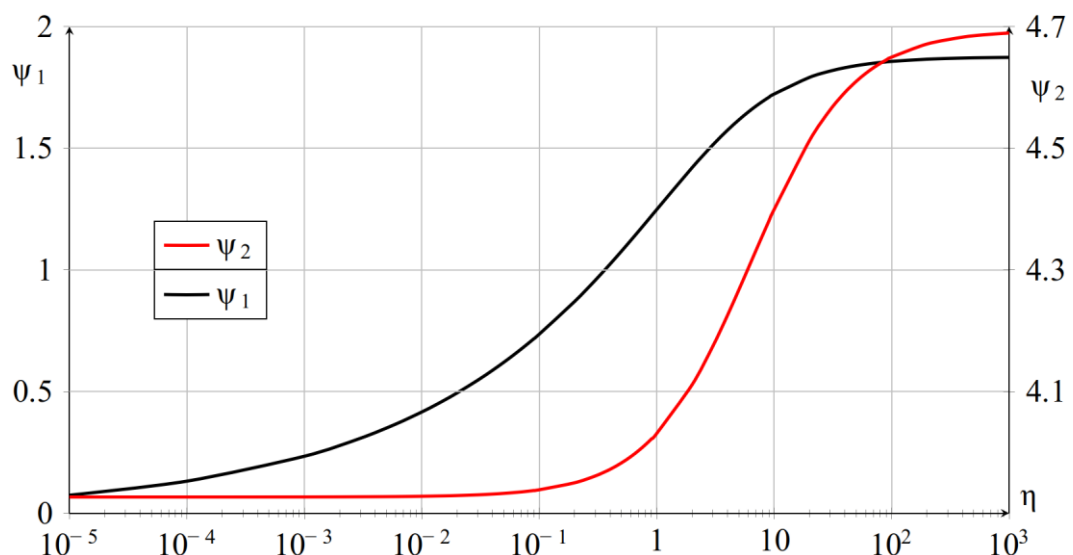


Рис. 2. – Результаты вычисления первых двух значений  $\psi$ .

Как видно из рис. 2, корни уравнения (22) растут с увеличением значения  $\eta$ , приближаясь к своим асимптотическим значениям.

Максимальные значения корней уравнения (22) можно получить, если положить в нем  $\eta = \infty$ . Данный вариант соответствует абсолютно жесткой заделке здания. В этом случае можно пренебречь первым слагаемым, а корни будут определяться из решения уравнения ниже.

$$1 + \cos(\psi^{\max}) \cosh(\psi^{\max}) = 0. \quad (25)$$

Уравнение (25) в точности совпадает с уравнением, полученным для консольного стержня с абсолютно жесткой заделкой, которое может быть найдено в справочной литературе.

Из решения (25) получим максимальные значения  $\psi_i = \psi_i^{\max}$  соответствующей формы колебаний  $i$ :

$$\begin{aligned} \psi_1^{\max} &= 1.875; \quad \psi_2^{\max} = 4.694; \quad \psi_3^{\max} = 7.855; \\ \psi_4^{\max} &= 10.996; \quad \psi_5^{\max} = 14.137; \quad \psi_{n>5}^{\max} \approx \frac{\pi(2n-1)}{2}. \end{aligned} \quad (26)$$

Аналогично, при  $\eta = 0$ , что соответствует шарнирному опиранию стержня (аналог физического маятника), из (22) получим уравнение:

$$\cos(\psi^{\min}) \sinh(\psi^{\min}) - \sin(\psi^{\min}) \cosh(\psi^{\min}) = 0. \quad (27)$$

Из решения (27) найдем минимальные значения  $\psi_i = \psi_i^{\min}$  соответствующие  $i$ -ой формы колебаний:

$$\begin{aligned} \psi_1^{\min} &= 0; \quad \psi_2^{\min} = 3.927; \quad \psi_3^{\min} = 7.069; \\ \psi_4^{\min} &= 10.210; \quad \psi_5^{\min} = 13.352; \quad \psi_{n>5}^{\min} \approx \frac{\pi(4n-3)}{4}. \end{aligned} \quad (28)$$

Отметим, что формулы для  $\psi_n$  при  $\eta = \infty$  и  $\eta = 0$ , выраженные через  $n$ , дают значение с погрешностью, не превышающей 0.1% уже для  $n = 3$ .

## Выводы

Основной целью статьи является исследование влияния жесткости упругого основания на частоты собственных колебаний здания. Поэтому, для

дальнейших рассуждений подставим (23) в формулу (8). В результате получим:

$$\omega = \frac{\psi^2}{h^2} \cdot \sqrt{\frac{EI_z}{m}}. \quad (29)$$

Из формулы (29) следует, что собственные частоты  $\omega$  увеличиваются пропорционально квадрату коэффициента  $\psi$ . Учитывая, что коэффициент  $\psi$  увеличивается с ростом жесткости основания согласно формуле (24) и полученным результатам решения уравнения (22), можно сделать вывод, что собственные частоты также будут возрастать. Следовательно, увеличение жесткости упругого основания приводит к увеличению собственных частот колебаний здания, однако это влияние ограничено, ввиду асимптотического характера зависимости  $\psi(\eta)$ . С целью снижения собственных частот колебаний здания используются демпферы [12].

Сравнивая между собой результаты, приведенные в (26) и (28) можно сделать вывод, что величины  $\psi_i$  при  $i > 5$  уже практически не зависят от значения  $\eta$  (разница не превышает 5%).

Полученные результаты являются промежуточными, так как требования нормативных документов предъявляются в том числе к максимальной величине ускорений. Поэтому, в дальнейшей работе планируется применение полученных результатов в контексте влияния жесткости упругого основания на ускорения здания. Данный анализ является необходимым, так как несмотря на тот факт, что увеличение жесткости упругого основания приводит к увеличению частот собственных колебаний (следовательно и ускорений), при этом уменьшаются перемещения (ввиду большей жесткости заделки), следовательно, ускорения, согласно формуле (6), также могут измениться в меньшую сторону.

---

## Литература

1. Корчинский И.Л., Бородин Л.А., Гроссман А.Б., Преображенский, В.С., Ржевский В.А., Ципенюк И.Ф., Шепелев В.Ф. Сейсмостойкое строительство зданий. Москва: Стройиздат, 1971. 320 с.
2. Аксёнов Н.Б., Аушев М.В. Исследование влияния соотношения жесткостей конструктивной системы на динамические параметры многоэтажного здания в зависимости от сейсмичности площадки // Инженерный вестник Дона. 2017. № 4. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4416](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4416).
3. Хан А.С. Влияние упругих свойств грунтового основания на работу стального каркаса одноэтажного здания при сейсмической нагрузке // Студенческий вестник. 2020. № 5-4(103). С. 54–59.
4. Земцова О.Г. Определение периода и формы собственных колебаний зданий и сооружений при сейсмическом воздействии с учетом податливости основания // Инженерный вестник Дона. 2021. № 5. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2021/6975](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2021/6975).
5. Пшеничкина В.А., Дроздов В.В., Строк С.И. Влияние жесткости основания на динамические характеристики здания как многомассового консольного стержня // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. №16(4). С. 298-310. DOI: 10.22363/1815-5235-2020-16-4-298-310.
6. Лампси Б.Б., Хазов П.А., Кофорова О.М., Генералова А.А. Методы определения собственных частот многоэтажных зданий // Вестник Волжского регионального отделения российской академии архитектуры и строительных наук. Н.Новгород, 2016. № 19. С. 176–180.
7. Хазов П.А., Кожанов Д.А., Анущенко А.М., Сатанов А.А. Динамика строительных конструкций при экстремальных природных воздействиях:

колебания прочность, ресурс: монография. Н.Новгород: Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т., 2022. 96 с.

8. Chapain S., Aly A. M. Vibration Attenuation in a High-Rise Hybrid-Timber Building: A Comparative Study // Applied Sciences. 2023. Vol. 13, No. 4. P. 2230. DOI: 10.3390/app13042230.

9. Taima M., El-Sayed T., Farghaly S. Longitudinal Vibration Analysis of a Stepped Nonlocal Rod Embedded in Several Elastic Media // Journal of Vibration Engineering and Technologies. 2022. No. 10. PP. 1399—1412. DOI: 10.1007/s42417-022-00454-7.

10. Денисов Г. В. Первая частота продольных колебаний стержня с точечной массой на конце при частичном опирании на кусочно-однородное упругое основание // Научный журнал строительства и архитектуры. 2022. № 4(68). С. 96–104.

11. Ерофеев В.И., Колесов Д.А., Плехов А.С., Хазов П.А. Волновая динамика деформируемых систем, взаимодействующих с упругоинерционными и неоднородными основаниями: монография. Н.Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т. им. Р.Е. Алексеева, 2018. 128 с.

12. Shein A., Zemtsova O. The Dynamics of the System «Elastic Foundation-High Rise Construction-Dynamic Ring-Type Damper» // Journal of Engineering and Applied Sciences. 2016. No. 11(11). PP. 2424–2429. DOI: 10.36478/jeasci.2016.2424.2429.

### References

1. Korchinskiy I.L., Borodin L.A., Grossman A.B., Preobrazhenskiy V.S., Rzhhevskiy V.A., Tsipenyuk I.F., Shepelev V.F. Sejsmostojkoe stroitel'stvo zdaniy [Earthquake-resistant construction of buildings]. Moskva: Stroyizdat, 1971. 320 p.

2. Aksënov N.B., Aushev M.V. Inzhenernyj vestnik Dona. 2017. № 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2017/4416.

3. Khan A.S. Studenchestkij vestnik. 2020. № 5-4(103). pp. 54–59.

4. Zemtsova O.G. Inzhenernyj vestnik Dona. 2021. № 5. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2021/6975](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2021/6975).
5. Pshenichkina V.A., Drozdov V.V., Strok S.I. Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2020. №16(4). pp. 298–310. DOI: 10.22363/1815-5235-2020-16-4- 298-310.
6. Lampsi B.B., Khazov P.A., Koforova O.M., Generalova A.A. Vestnik Volzhskogo regional'nogo otdelenija rossijskoj akademii arhitektury i stroitel'nyh nauk, 2016. № 19. pp. 176–180.
7. Khazov P.A., Kozhanov D.A., Anushchenko A.M., Satanov A.A. Dinamika stroitel'nyh konstrukcij pri jekstremal'nyh prirodnyh vozdeystvijah: kolebanija prochnost', resurs [Dynamics of building structures under extreme natural influences: fluctuations in strength, resource]. N. Novgorod: NGASU, 2022. 96 p.
8. Chapain S., Aly A. M. Applied Sciences. 2023. Vol. 13, No. 4. P. 2230. DOI: 10.3390/app13042230.
9. Taima M., El-Sayed T., Farghaly S. Journal of Vibration Engineering and Technologies. 2022. No. 10. pp. 1399—1412. DOI: 10.1007/s42417-022-00454-7.
10. Denisov G. V. Nauchnyj zhurnal stroitel'stva i arhitektury. 2022. № 4(68). pp. 96–104.
11. Yerofeyev V.I., Kolesov D.A., Plekhov A.S., Khazov P.A. Volnovaja dinamika deformiruemyh sistem, vzaimodejstvujushhij s uprugoinercionnymi i neodnorodnymi osnovanijami [Wave dynamics of deformable systems interacting with elastic-inertial and inhomogeneous bases]. N. Novgorod: NGTU n.a. R.E. Alekseev, 2018. 128 p.
12. Shein A., Zemtsova O. Journal of Engineering and Applied Sciences. 2016. No. 11(11). P. 2424–2429. DOI: 10.36478/jeasci.2016.2424.2429.