

## Марковская модель процессов релаксации и старения волокнистых материалов

*П.А. Севостьянов, А.А. Белевитин, И.М. Бурдин*

*Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина, Москва*

**Аннотация:** Предложена и обоснована концепция волокнистого материала (далее ВМ) как мягкой конструкции, образованной окруженными воздухом элементами волокон и участками взаимодействия волокон по поверхностям касания. Элементы волокон находятся в деформированном состоянии. Деформация волокон – обратимая, упруго - эластическая. На участках взаимодействия между волокнами действуют силы сцепления и сухого трения. Деформация волокон приводит к сохранению в материале остаточной внутренней энергии. При малых нагрузках ВМ может изменять свое состояние обратимо. При больших нагрузках необратимо изменяется структура участков взаимодействия. Процессы старения и деградации ВМ – это постепенные безвозвратные переходы из одной группы состояний в другие. Динамика этих процессов носит статистический характер. Поэтому разработана Марковская модель изменения состояний в виде нескольких невозвратных подмножеств и одного эргодического подмножества состояний. На качественном уровне показана возможность использования предложенной модели для описания динамики процессов старения ВМ и оценки продолжительности этого процесса с учетом его вероятностно - статистической природы.

**Ключевые слова:** волокнистый материал, старение, мягкая конструкция, упруго-эластическая деформация, необратимый процесс, Марковская модель, статистическая динамика.

Волокном принято считать любой предмет, у которого один размер – длина – на много порядков превосходит два других размера. В отличие от так называемых «деформируемых сплошных сред» [1-3] ВМ являются конструкциями [4, 5]. Эти конструкции построены из волокон с воздухом в промежутках между ними (если это не какой-то специально изготовленный ВМ или композит с заполнением другой, отличной от воздуха, средой). В отличие от большинства встречающихся в технике конструкций эти конструкции по понятным причинам можно назвать «мягкими». К ВМ относят тканые, нетканые, вязаные, трикотажные полотна, пряжу, крученую пряжу, нити, нитки и др., изготовленные из волокон конечной или практически бесконечной длины.

В структуре этих конструкций можно выделить участки двух типов. Первый тип – это участки волокон, окруженные воздухом. Волокна на этих участках находятся в недеформированном или деформированном состоянии. Обычно деформация волокон – это удлинение или изгиб, упругая и эластическая деформация с разными временами релаксации. Второй тип – это участки, на которых волокна взаимодействуют между собой по поверхностям соприкосновения благодаря силам сцепления и трения. Силы сцепления обусловлены шероховатостью поверхности волокон и практически не зависят от внешних воздействий. Силы трения вызваны силами внешнего нормального давления на поверхности соприкосновения волокон и описываются законами сухого трения Амонтона – Кулона [4, 6].

На рис.1 схематически представлено расположение волокон в нетканом ВМ, например, в войлоке. Буквами А, В, С, D, Е обозначены участки второго типа.

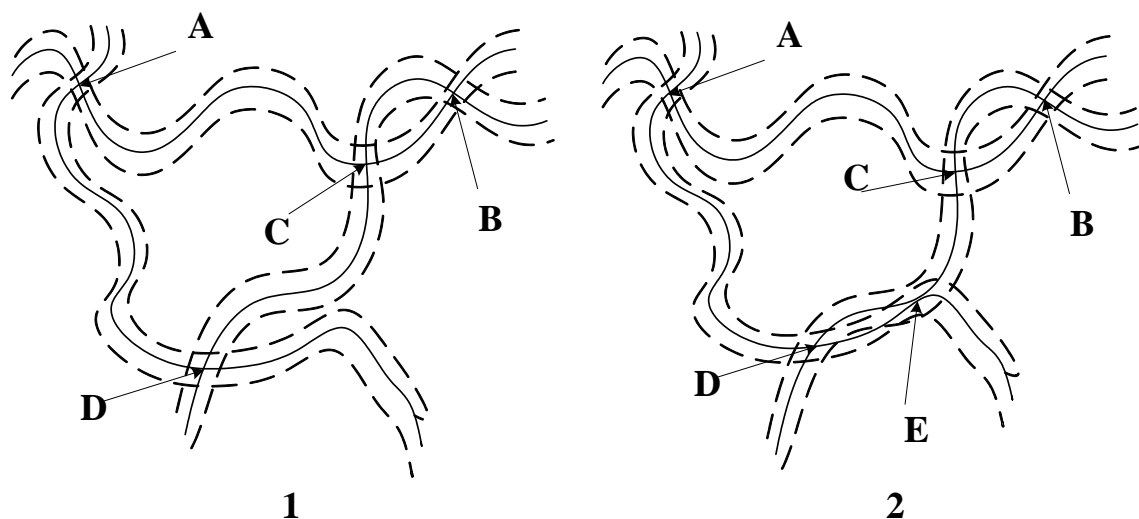


Рис. 1. Схематическое представление «мягкой» конструкции ВМ

Структура конструкции ВМ с точки зрения взаимодействия волокон и их деформации показана на рис.2. Каждый участок первого типа моделируется упруго-эластичным элементом («пружиной»). Каждый участок второго типа моделируется элементом сцепления и трения.

В процессе создания ВМ волокна подвергаются механическим нагрузкам, которые приводят к их деформациям. Если силы деформации не слишком велики, то участки второго типа фиксируют положения волокон и препятствуют восстановлению их формы и снятию деформаций. Вследствие этого разные участки волокон могут иметь разные деформации изгиба и удлинения. Частично деформация волокна может уменьшиться вследствие релаксации ее эластической составляющей.

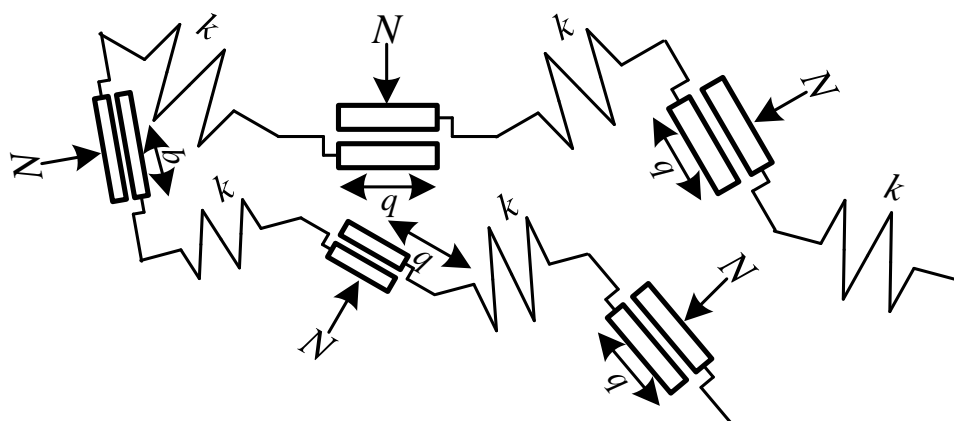


Рис. 2. Механическая модель «мягкой» конструкции – взаимодействия волокон в нетканом ВМ

После завершения процесса изготовления ВМ его волокна сохраняют в себе неизрасходованную до конца энергию деформации. Эта остаточная, «внутренняя» энергия делает материал упругим при внешних механических воздействиях.

Если воздействия на ВМ не настолько велики, чтобы нарушить участки второго типа, то они воспринимаются участками первого типа, что приводит к новым обратимым деформациям волокон упруго - эластического типа.

Если же внешние воздействия настолько велики, что изменяют участки второго типа, приводят к их частичному исчезновению или, наоборот, к появлению новых участков (сравни изображения 1 и 2 на рис.1), то такие изменения являются необратимыми. Структура ВМ изменяется. Глобально,

для всего ВМ, это проявляется в эффектах его «слёживания», «старения», «деградации» [7-9].

Заметим, что все описанные механизмы поведения волокон в ВМ носят статистический характер. Поэтому и изучение его требует статистических методов не только для обработки экспериментальных результатов, но и вероятностно-статистических методов моделирования подобных систем. Как известно [10], согласно Гиббсу в любой системе статистической механики энергия распределена по экспоненциальному закону. В случае ВМ внутренняя энергия состоит из потенциальной энергии упруго – эластической деформации волокон, которая не может быть израсходована системой полностью из-за ограничений на внутренние движения участков 2-го типа [11, 12]. Достаточно большие внешние воздействия выводят локальные области ВМ из местной «потенциальной ямы», позволяют преодолеть энергетический барьер и перейти в подмножество состояний другой потенциальной ямы. При этом полученная извне энергия расходуется на преодоление энергетического барьера, что выражается в изменении количества, структуры и свойств участков 2-го типа.

Таким образом, с энергетической точки зрения, эффекты «слёживания», «старения», «деградации» ВМ во времени можно интерпретировать как его переход из одного состояния в другое по запасу остаточной внутренней энергии. При этом некоторые изменения состояний энергетически обратимы, поскольку лежат в области упруго – эластических деформаций, а другие означают переход в новую категорию, без возможности восстановления предыдущих состояний.

Процесс изменения структуры ВМ во времени - многостадийный. По мере накопления эффектов внешних механических воздействий остаточная механическая энергия, сохраняющаяся в волокнах ВМ, постепенно расходуется на участках взаимодействия волокон на преодоление сил

---

сцепления и трения без эквивалентной компенсации. ВМ переходит в состояния, в которых он практически теряет свои изначально обратимые свойства.

Ниже описывается простая математическая модель, описывающая на качественном уровне динамику изменения ВМ в соответствии с описанным механизмом его старения. В основу модели положена Марковская схема изменения состояний системы [13] с конечным числом возможных состояний  $n$  и дискретным временем  $t = 0, 1, 2, \dots, Tm$ . Выделим одно эргодическое  $H$  и два невозвратных подмножества состояний  $B1$  и  $B2$ , которые связаны переходами в каскад  $B2 \rightarrow B1 \rightarrow H$ . Для отображения динамики системы на качественном уровне ограничимся 4 состояниями  $H$  и по 3 состояния у  $B1$  и  $B2$ . Итого, в рассматриваемой Марковской модели  $n = 10$  состояний. Увеличение числа состояний для детализации процесса не представляет принципиальных трудностей.

Первоначально система находится в одном из сообщающихся состояний подмножества  $B2$ . Обратимые процессы в каждом из подмножеств состояний описываются вероятностями переходов матриц соответствующего подмножества  $A(H)$ ,  $A(B1)$ ,  $A(B2)$ . Необратимые процессы описываются ненулевыми вероятностями перехода из  $B2$  в  $B1$  и из  $B1$  в  $H$ . Прямые переходы  $B2 \rightarrow H$  отсутствуют.

Тем самым моделируется последовательный, многоэтапный процесс перехода системы из начального состояния в конечное, эргодическое подмножество состояний.

Вектор вероятностей состояний на момент времени  $t$  связан с вектором на предыдущий момент времени  $t - 1$  известным соотношением [13]:

$$P(t) = P(t - 1) \cdot A.$$

Например, матрица вероятностей переходов в одном из вариантов модели была задана в виде:

---

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,2 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,2 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,3 & 0,45 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,1 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0,05 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0,45 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,1 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0,1 & 0,15 & 0 \end{pmatrix}$$

За начальное выбрано состояние 10.

На рис.3 показана динамика изменения вероятностей состояний системы.

Предлагаемая вероятностная математическая модель изменения состояний материала включает в себя как колебания, описывающие упругие и эластические обратимые деформации, так и необратимые эффекты, которые и моделируют потерю упругости, старение, деградацию материала в соответствии с приведенным выше механизмом изменения его свойств во времени. Модель допускает разное время релаксации – перехода в конечное эргодическое множество состояний – в зависимости от исходного состояния элемента и через вероятностную интерпретацию процесса учитывает его вероятностную природу.

Среднее время переходного режима можно оценить, вычислив фундаментальную матрицу:

$$N = (E - B)^{-1}$$

где  $E$  – единичная матрица размером, равным числу невозвратных состояний (в примере – 6); матрица  $B$  – квадратная, «вырезанная» из матрицы  $A$  исключением эргодических состояний [13]. Средняя

продолжительность переходного режима  $T_{sr}$ , выраженная в числе шагов Марковской цепи, равна сумме элементов каждой строки фундаментальной матрицы  $N$ .

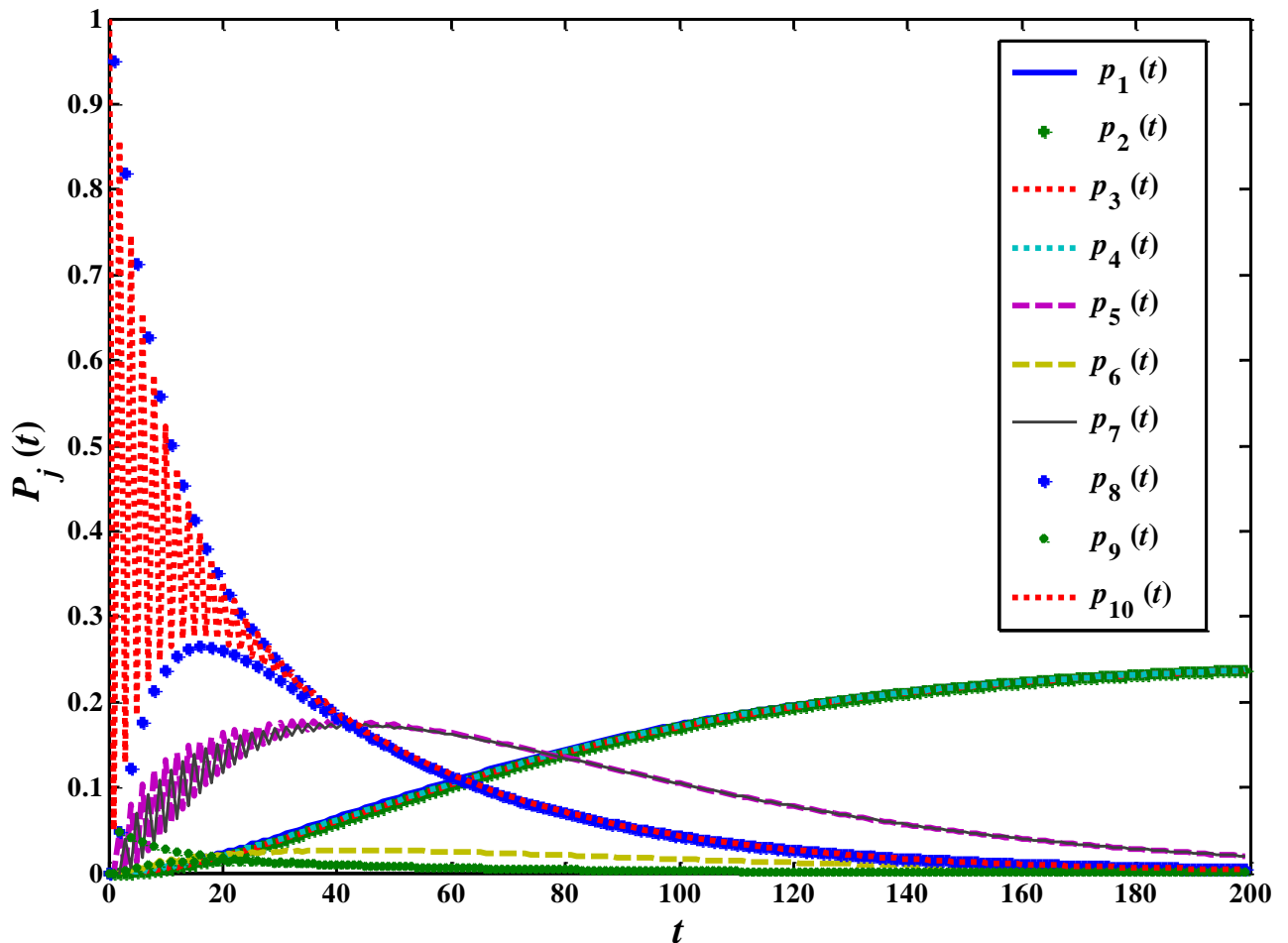


Рис. 3. Динамика изменения вероятностей состояний материала

С помощью матриц  $N$  можно вычислить и среднеквадратические отклонения  $skoT$  продолжительности переходного режима. Тем самым модель позволяет оценить параметры времени старения материала. Для матрицы  $A$  оценки равны:

$$T_{sr} = [ 42.6702 \quad 44.6597 \quad 43.7696 \quad 83.5649 \quad 85.5123 \quad 84.6175 ]$$
$$skoT = [ 28.3063 \quad 28.3097 \quad 28.3081 \quad 40.0129 \quad 40.0148 \quad 40.0136 ]$$

Эти данные показывают, как заметно меняется время старения для разных элементов материала, в зависимости от их начального состояния.

Марковская модель и ее матрица вероятностей переходов  $A$  позволяют построить и имитационную модель смены состояний системы на базе циклического обращения к алгоритму моделирования событий полной группы [14].

На рис.4 показаны три реализации динамики смены состояний в модели.

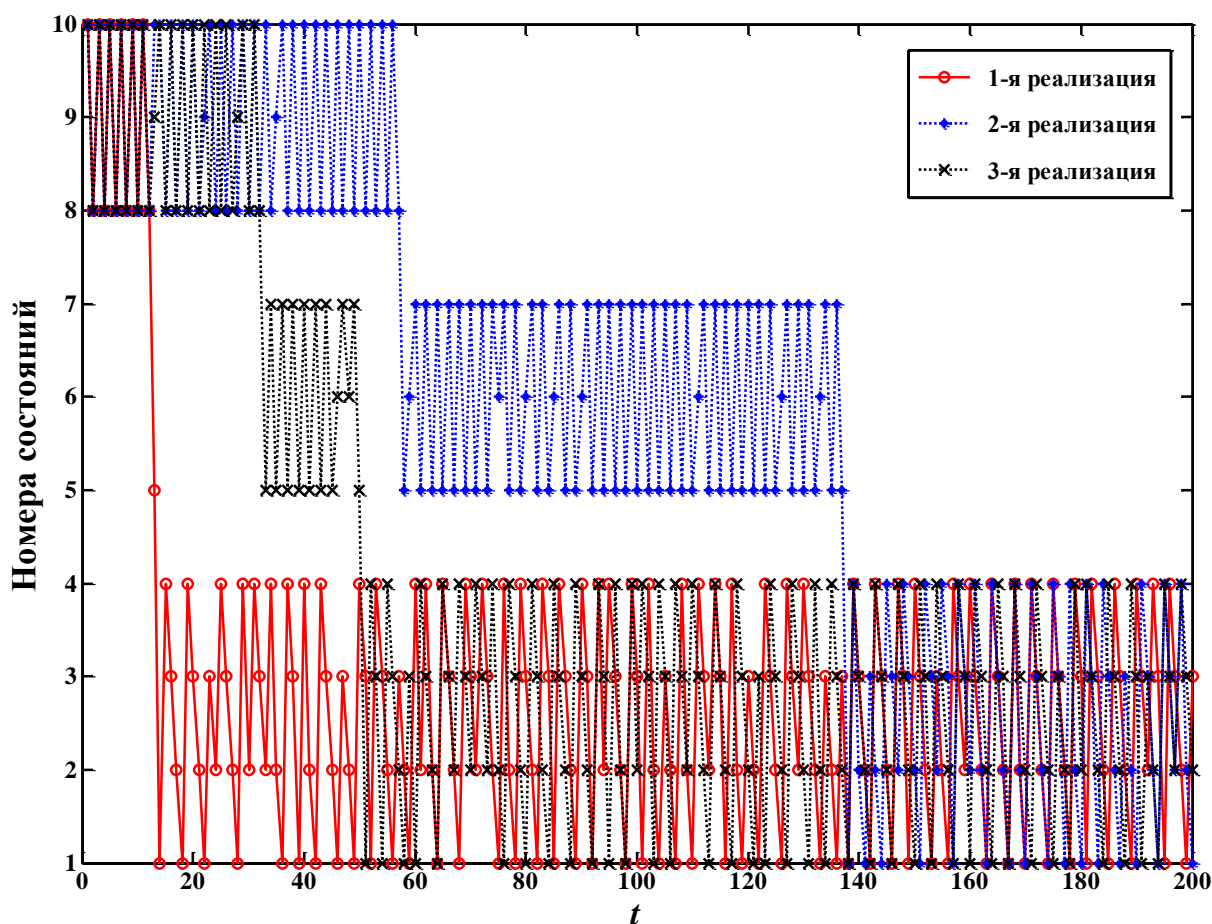


Рис. 4. Имитация смены состояний VM в процессе его старения на основе представлений о его структуре и механизме взаимодействия волокон

Как видно из графика, система, используемая в качестве модели поведения VM в процессе релаксации и старения, статистически



непредсказуемым образом меняет свои состояния, чередуя обратимые изменения с необратимыми, последовательно сменяемыми состояниями.

### **Выводы**

1. Разработана интерпретация ВМ как мягкой конструкции из волокон и/или нитей.

2. Предложена интерпретация процессов деформации, старения, деградации ВМ как диссипации внутренней энергии деформированного состояния волокон.

3. Разработана Марковская модель динамики обратимых изменений и диссипации энергии при изменении состояния ВМ под действием внешних воздействий.

4. Разработан и реализован алгоритм имитационного статистического моделирования процессов деформации, релаксации, старения, деградации и динамики энергетических изменений в ВМ.

### **Литература**

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Российская акад. наук. - Изд. 5-е, испр. - Москва: Наука, 1994. - 22 см. Т. 1. - 1994. - 528 с.

2. Кулинич И.И., Языев С.Б., Языева С.Б. К вопросу определения релаксационных констант уравнения связи Максвелла для жестких полимеров в задачах устойчивости // Инженерный вестник Дона, 2012, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/950](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/950)

3. Смелик Г.Г., Сысоев А.К., Печикин О.Я. Числовые характеристики релаксации напряжений в пропитанном растворами песчаном бетоне // Инженерный вестник Дона, 2011, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2011/417](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2011/417).

4. Севостьянов П.А. Компьютерные модели в механике волокнистых материалов. - Москва: Тисо Принт, 2013. - 253 с.



5. Комиссаров С.В. Изучение продолжительности процесса растяжения до разрыва. // Инженерный вестник Дона, 2010, №2. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/192

6. Крагельский И.В. Трение волокнистых веществ. - Москва; Ленинград: Гизлегпром, 1941 (Калуга). - 128 с.

7. Rathinamoorthy R. Effect of repeated dry-cleaning process on physical properties of cotton, silk and wool fabrics. Indian Journal of Fibre & Textile Research, Vol. 45, March, 2020, pp. 116-122.

8. Moezzi M., Khavari S., Ghane M. Effect of UV degradation and dynamic loading on durability of acrylic carpets using multiple regression method. Indian Journal of Fibre & Textile Research, Vol. 45, March, 2020, pp. 26-31.

9. Mukhopadhyay A., Midha V.K., Ray N.C. Impact of abrasion on mass loss and appearance of injected slub yarn fabrics. Indian Journal of Fibre & Textile Research, Vol. 42, December, 2017, pp. 413-419.

10. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: в 10 т. - Изд. 6-е, стер. - Москва: Физматлит, 2013-. - 22 см. Т. 5, ч. 1: Статистическая физика. - 2013. - 616 с.

11. Sevostyanov P.A., Samoiloa T.A., Tikhomirova M.L. Dry and Viscous Friction, Statistical Factors, Fluctuation - Dissipation Theorem and Features of their Manifestations in Relaxation of Fibrous Materials // Fibre Chemistry. – 2020. – Vol. 51. – No 6. – P. 449-451.

12. Sevostyanov P.A., Samoiloa T.A. Model and energy aspects for propagation of strain and mechanical stresses in textile fabrics // Fibre Chemistry. – 2018. – Vol. 50. – No 2. – P. 108-110.

13. Кемени Д., Снелл Д. Конечные цепи Маркова. - Москва: Наука, 1970. - 271 с.

14. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на электронных вычислительных машинах. - Москва: Сов. радио, 1971. - 399 с.

---

## References

1. Sedov L.I. Mekhanika sploshnoj sredy [Continuum mechanics]. Rossijskaya akad. nauk. Izd. 5-e, ispr. Moskva: Nauka, 1994. 22 sm. T. 1. 1994. 528 p.
  2. Kulinich I.I., YAzyev S.B., YAzyeva S.B. Inzhenernyj vestnik Dona, 2012, №3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/950](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2012/950)
  3. Smelik G.G., Sysoev A.K., Pechikin O.YA. Inzhenernyj vestnik Dona, 2011, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2011/417](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2011/417).
  4. Sevost'yanov P.A. Komp'yuternye modeli v mekhanike voloknistyh materialov [Computer models in the mechanics of fibrous materials]. Moskva: Tiso Print, 2013. 253 p.
  5. Komissarov S.V. Inzhenernyj vestnik Dona, 2010, №2. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/192](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2010/192)
  6. Kragel'skij I.V. Trenie voloknistyh veshchestv [Friction of fibrous substances]. Moskva; Leningrad: Gizlegprom, 1941 (Kaluga). 128 p.
  7. Rathinamoorthy R. Indian Journal of Fibre & Textile Research, Vol. 45, March, 2020, pp. 116-122.
  8. Moezzi M., Khavari S., Ghane M. Indian Journal of Fibre & Textile Research, Vol. 45, March, 2020, pp. 26-31.
  9. Mukhopadhyay A., Midha V.K., Ray N.C. Indian Journal of Fibre & Textile Research, Vol. 42, December, 2017, pp. 413-419.
  10. Landau L.D. Teoreticheskaya fizika [Theoretical physics]: v 10 t. Izd. 6-e, ster. Moskva: Fizmatlit, 2013. 22 sm. T. 5, ch. 1: Statisticheskaya fizika [Statistical physics]. 2013. 616 p.
  11. Sevostyanov P.A., Samoilova T.A., Tikhomirova M.L. Fibre Chemistry. 2020. Vol. 51. No 6. pp. 449-451.
  12. Sevostyanov P.A., Samoilova T.A. Fibre Chemistry. 2018. Vol. 50. No 2. pp. 108-110.
-



13. Kemeni D., Snell D. Кoneчnye cepи Markova [Finite Markov chains]. Moskva: Nauka, 1970. 271 p.
14. Pollyak YU.G. Veroyatnostnoe modelirovanie na elektronnyh vychislitel'nyh mashinah [Probabilistic modeling on electronic computers]. Moskva: Sov. radio, 1971. 399 p.